

فصل ۱

مجموعه ها و دنباله ها

۱.۱ مجموعه ها

۱.۱.۱ مجموعه های اعداد

در این بخش ابتدا مجموعه‌ی اعدادی را که تابحال شناخته‌اید و نحوه پیدایش آنها را بررسی کرده و سپس مجموعه‌ها را در حالت کلی بررسی میکنیم و عملیات‌هایی چون اجتماع، اشتراک و تفاضل را بر آنها تعریف خواهیم کرد. تاریخچه‌ی دقیقی از نحوه شکل‌گیری و تکامل اعداد در دسترس نیست. از آثار بجای مانده از گذشتگان تنها می‌توان حدس زد که چگونه از شمارش در کارهای روزمره‌ی خود استفاده می‌کرده‌اند. خطوط موازی کوچک بر استخوان ران یک گاو که در کنگو در قاره‌ی آفریقا یافت شده است متعلق به حدود ۸۰۰۰ سال پیش است. آنها برای شمارش به ازای هر واحد شمارش (مثلا شمارش فرزندان یا گوسفندان یا افراد قبیله و....) یک خط بر استخوان یا چوب حک می‌کرده‌اند. گاهی نیز از سنگریزه برای شمارش استفاده کرده‌اند. شاید ابتدایی‌ترین راه شمارش استفاده از انگشتان دست باشد. در دسترس بودن انگشتان و خم کردن یک انگشت به ازای شمارش یک چیز کار ساده‌ایست و دلیل استفاده بشر از مبنای ۵ و ۱۰ به همین علت است. حتی مبنای ۲۰ هم در میان قوم مایاها در آمریکای جنوبی رواج داشته و یادآور دورانی است که بشر پابرهنه بوده است. در این دستگاه هر مرد معادل عدد ۲۰ بوده است. (چرا؟) ابتدایی‌ترین مجموعه مورد استفاده بشر همانطور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی بوده است. مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

لازم است خاصیتی جالب را در مورد مجموعه $\mathbb{N}$ معرفی کنیم. چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را باهم جمع کنیم حاصل باز هم عدد طبیعی است بعنوان مثال: $1 + 3 = 4 \in \mathbb{N}$ در حالت کلی اگر a, b دو عدد طبیعی باشند واضح است که $a + b$ نیز عددی طبیعی است. این خاصیت را اصطلاحاً بسته بودن $\mathbb{N}$ نسبت به عمل $+$ می‌نامیم.

مثال ۱.۱. آیا مجموعه $\mathbb{N}$ نسبت به عمل ضرب بسته است؟ نسبت به عمل تفریق چطور؟ نسبت به عمل تقسیم چطور؟

تمرین ۱.۱. مجموعه $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این مجموعه نسبت به ضرب بسته است نسبت به جمع چطور؟ نسبت به تقسیم چطور؟

تمرین ۲.۱. مجموعه $B = \{-1, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه نسبت به جمع بسته است؟ نسبت به ضرب چطور؟

تمرین ۳.۱. فرض کنید مجموعه ای چون A داریم بطوریکه می دانیم این مجموعه نسبت به اعمال جمع و تفریق بسته است و شامل عدد یک نیز هست. ثابت کنید که این مجموعه A همان مجموعه اعداد صحیح است. حال با توجه به تعریف بسته بودن می توان متوجه ضعف مجموعه اعداد طبیعی شد. $\mathbb{N}$ نسبت به تفریق بسته نیست. این بزرگترین ضعف $\mathbb{N}$ است. زمانی که بشر برای معاملات خود متوجه شد که مقروض بودن را نمی توان با اعداد طبیعی نمایش داد خلاء اعداد صحیح را حس کرد و مجبور شد اعداد صحیح را بکار بگیرد.

تعریف ۱.۱. مجموعه اعداد صحیح را که با نماد $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم عبارتست از :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

اینکه اعداد صحیح را با حرف $\mathbb{Z}$ نمایش می دهند به خاطر کلمه *Zahlen* می باشد که لغتی آلمانی است. اعداد صحیح نیز به نوبه ی خود دارای ضعف بسته نبودن نسبت به عمل تقسیم بود به عنوان مثال دقت کنید که :

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \notin \mathbb{Z}$$

برای برطرف کردن این ضعف $\mathbb{Z}$ مجموعه ای مورد نیاز بود که شامل تمام کسرهای ممکن که می توان به کمک اعداد صحیح ساخت باشد. این مجموعه را اعداد گویا می نامیم و بصورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۲.۱. مجموعه اعداد گویا را که با نماد $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم ($\mathbb{Q}$ حرف اول کلمه *Quotient* به معنای خارج قسست) بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا کوچکترین مجموعه ای است که نسبت به هر چهار عمل اصلی $+, -, \times, \div$ بسته است. با این حال همین مجموعه هم بی نقص نیست. در واقع پیروان مکتب فیثاغورس که به فیثاغورثیان معروف بودند اولین بار به این حقیقت نگران کننده پی بردند که قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی توان بصورت کسر نوشت. فیثاغورثیان که ایمان کامل به اعداد گویا داشتند و آنرا بی عیب و نقص می پنداشتند از این کشف نگران شدند و تا سالها آن را پنهان نگاه داشته بودند و حتی داستانی نقل کرده اند که دو تن از پیروان این مکتب در یک کشتی عازم سفر بودند و یکی از آنها دیگری را از این راز مهم آگاه کرد و گفت پس از سفر آن را با دیگران در میان خواهم گذاشت. همین امر باعث شد تا دوستش او را به دریا پرتاب کند.

اکنون می دانیم که قطر مربعی به ضلع یک عددی غیر گویا یا اصم است. این عدد عددی نیست جز $\sqrt{2}$. می توان ثابت کرد که $\sqrt{2}$ را نمی توان بصورت یک کسر نوشت بعبارت بهتر به ازای هر دو عدد صحیح دلخواه a, b همواره داریم: $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$

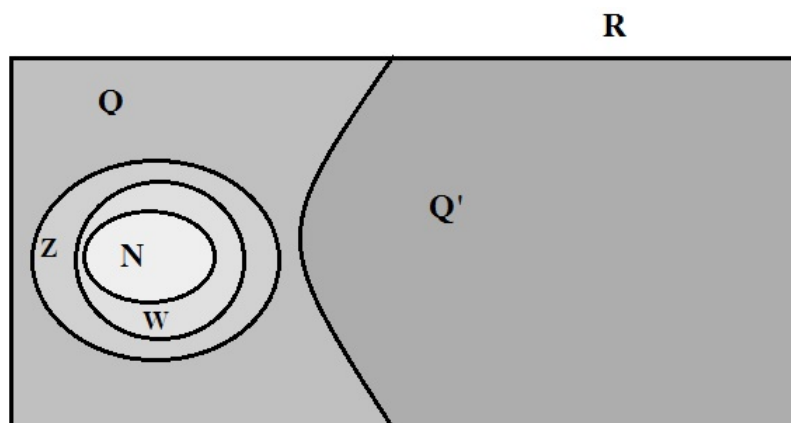
تمرین ۴.۱. اگرچه هنوز ابزار لازم برای اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$ را در اختیار ندارید اما تلاش برای اثبات آن خالی از لطف نیست. برای اینکه ثابت کنید $\sqrt{2}$ گنگ است ثابت کنید $\sqrt{2}$ گویا نیست. بدین منظور تصور کنید که اگر $\sqrt{2}$ بخواند گویا باشد پس باید داشته باشیم: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ و فرض کنید که کسر حاصل تحویل ناپذیر است (کسری که صورت و مخرج آن دیگر ساده نشود). با به توان ۲ رساندن طرفین و استفاده از خاصیت زوج بودن به عبارتی برسید که با فرض سازگار نیست. (این روش اثبات غیرمستقیم یا همان برهان خلف نام دارد).

مجموعه اعداد گنگ را با نماد $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم. یکی دیگر از اعداد گنگی، که قدمت زیادی دارد عدد π است. نسبت محیط دایره به قطر آن عدد π است. داستان پیدایش عدد پی با مسأله تربیع دایره در ارتباط تنگاتنگ است. برای آشنایی با تربیع دایره می توانید همین «تربیع دایره» را در گوگل جستجو کنید. محاسبه مقدار تقریبی عدد پی نیز داستان جالبی دارد. چنانچه علاقمند هستید می توانید به کتاب تاریخ ریاضیات نوشته هاوارد ایوز صفحه ۱۱۵ مراجعه کنید. (نسخه pdf این کتاب دو جلدی در سایت کتابناک موجود و رایگان است). در اینجا بد نیست به تقریبی از عدد پی اشاره کنیم که توسط غیاث الدین جمشید کاشانی منجم و ریاضی دان دربار الغ بیگ بدست آمده است. وی توانست عدد پی را تا شانزده رقم اعشار بدرستی تقریب کند. این رکورد تا حدود دویست سال پابرجا بود تا سرانجام در سال ۱۶۱۰ میلادی توسط لودولف وان کولن ریاضی دان اهل آلمان شکسته شد. وی عدد پی را تا ۳۵ رقم تقریب کرد. الغ بیگ گورکانی نوه تیمور گورکانی و پسر شاهرخ گورکانی بود. وی بر خلاف پدر بزرگش که یک خونریز تمام عیار بود، به هنر و دانش اهتمام ویژه ای داشت. وی حتی در نجوم تبحر داشت و کمی هم اطلاعات ریاضی نزد جمشید کاشانی فرا گرفت. تاکنون با مجموعه های $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ آشنا شده اید. رابطه بین سه مجموعه اول بصورت زیر است.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

در این رابطه مجموعه $\mathbb{Q}'$ چه جایگاهی دارد؟ حال می توان مجموعه اعداد حقیقی را هم تعریف کرد.

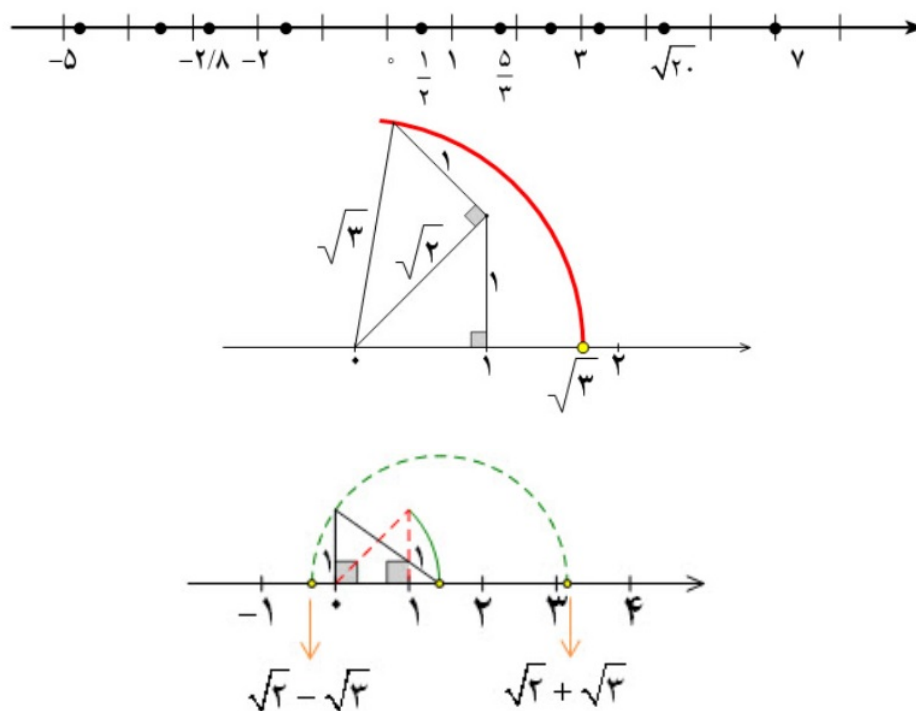
تعریف ۳.۱. مجموعه اعداد حقیقی را که با نماد $\mathbb{R}$ نشان می دهیم برابر است با: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. (علامت $\cup$ به معنای اجتماع است که در کلاس نهم تا حدودی با آن آشنا شده اید).



شکل ۱.۱: رابطه ی بین مجموعه اعداد

مجله ریاضی: مجموعه اعداد حقیقی نیز به شکلی دیگر (نه بسته بودن نسبت به اعمال اصلی) دارای نقصان است. معادلات درجه دوم را هنوز نخوانده اید با اینحال معادلات درجه دومی وجود دارند که جوابهای آن معادله دیگر عددی حقیقی نیست. مثل معادله $x^2 + 1 = 0$ که جواب آن عدد عجیبی است. در واقع جواب این معادله عددی است بنام i با این ویژگی عجیب که $i^2 = -1$. بله این اعداد عجیب اعداد مختلط نام دارند و با نماد $\mathbb{C}$ نشان داده می شوند. برای مطالعه بیشتر ویکی پدیای فارسی را ملاحظه کنید.

متناظر به هر عدد حقیقی نقطه ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد. در اشکال زیر موقعیت برخی از اعداد روی محور نشان داده شده است.



شکل ۲.۱: نمایش اعداد گویا و گنگ روی محور اعداد

اگر به شکل ۲.۱ بدقت نگاه کنید متوجه خواهید شد که این شکل راه حل بسیار زیبایی را به شما معرفی

کرده است و ارزش آن بیش از یک شکل ساده است. سرانجام آخرین مجموعه از اعداد را که بزرگتر از $\mathbb{N}$ و کوچکتر از $\mathbb{Z}$ است را معرفی می کنیم. مجموعه اعداد حسابی که با نماد $\mathbb{W}$ نشان می دهیم عبارتست از $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

تمرین ۵.۱. جاهای خالی را با مجموعه مناسب کامل کنید.

$$a) \mathbb{R} - \mathbb{Q} =$$

$$b) \mathbb{Z} - \mathbb{W} =$$

$$c) \mathbb{N} - \mathbb{W} =$$

$$d) \mathbb{Q}' - \mathbb{Q} =$$

۲.۱.۱ بازه های اعداد حقیقی

برای ورود به مطلب و آشنایی با بازه ها دو نامعادله زیر را در نظر بگیرید:

$$-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \quad (1), \quad 3x+1 < 7 \quad (2)$$

با حل این دو نامعادله مجموعه جواب معادله شماره ۱ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ و مجموعه جواب معادله شماره ۲ عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$. آیا می توان مجموعه جواب را با نمادی ساده تر از مجموعه های فوق نوشت؟ جواب مثبت است. بازه ها جوابگوی ما برای این ساده نویسی هستند. مجموعه جواب نامعادله ۱ بازه ی $[-2, 4)$ است و مجموعه جواب نامعادله شماره ۲ بازه ی بی کران $(-\infty, 2)$ است. حال به سراغ تعریف بازه ها می رویم.

تعریف ۴.۱. یک بازه ، زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی است که بصورت های زیر تعریف می شود:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{بازه ی باز}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{بازه ی نیم باز}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{بازه ی بسته}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

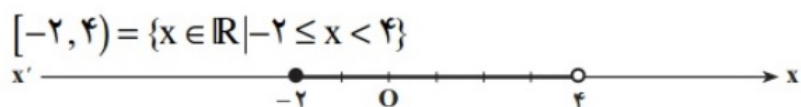
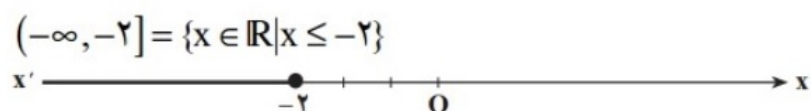
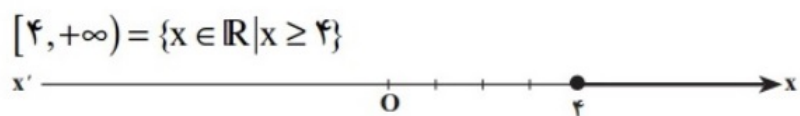
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad \text{بازه ی باز بی کران}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \quad \text{بازه ی نیم باز بی کران}$$

اغلب بجای اصطلاح نیم باز از اصطلاح نیم بسته هم استفاده میشود. نماد ∞ که بی نهایت خوانده می شود (مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت) یک عدد حقیقی نیست فقط نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی کران است. یعنی هر عددی خواه بسیار بزرگ یا خواه بسیار کوچک در این بازه ها می تواند وجود داشته باشد.

در اشکال زیر چند بازه را بعنوان مثال روی محور اعداد حقیقی نمایش داده ایم.



مثال ۲.۱. درست و نادرست را بررسی کنید و جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

$$(a) : 3 \in [-1, \sqrt{10})$$

$$(b) : \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1]$$

$$(c) : \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$$

$$(d) : -1395 \in (-\infty, -1396)$$

$$(e) : \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \in [3, 4]$$

$$(f) : \emptyset \subseteq (-\pi, \pi)$$

$$(g) : (-\infty, 3) \cap (-2, 0) \cap (-1, +\infty) =$$

$$(h) : \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) =$$

$$(m) : \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$(n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) =$$

تمرین ۶.۱. درست و نادرست را مشخص کنید و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} (a) : [0, 1) \subset \mathbb{Q} & \quad (b) : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}' & (c) : \sqrt{n^2 + 1} \in \mathbb{Q}' \\ (e) : \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}' & \quad (f) : \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W} & (g) : \frac{1 - \pi}{2} \in (-1, +\infty) \\ (h) : \sqrt{-1} \in \mathbb{R} & \quad (m) : \sqrt[3]{-27} \in \mathbb{Q} & (n) : (-\infty, \sqrt{3}) \cap (0, \frac{\pi}{2}) = \\ (d) : \sqrt{841} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

۳.۱.۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

در این بخش می خواهیم در مورد تعداد اعضای یک مجموعه صحبت کنیم.

تعریف ۵.۱. مجموعه ای چون A را یک مجموعه متناهی (باپایان) گوئیم هرگاه تعداد اعضای آن را بتوان با یک عدد حسابی نمایش داد. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را با نماد $|A|$ نمایش دهیم متناهی بودن یک مجموعه چون A به معنای آن است که به ازای یک عدد حسابی مثل k داریم $|A| = k$. در غیر اینصورت مجموعه را نامتناهی (بی پایان) گوئیم.

مثال ۳.۱. مجموعه های زیر را بررسی کنید و متناهی یا نامتناهی بودن آنها را معین کنید.

- ۱ - مجموعه دانش آموزان سال دهم رشته ریاضی در کشور.
- ۲ - تعداد اعداد ۳ رقمی و بزرگتر از ۵۰۰
- ۳ - تعداد اعداد اول.
- ۴ - مجموعه اعداد طبیعی فرد.
- ۵ - مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان بالغ.
- ۶ - مجموعه دایره هایی که مرکزشان مبدا مختصات است.
- ۷ - مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.
- ۸ - مجموعه درختان جنگل آمازون.
- ۹ - مجموعه کسر هایی که مثبت هستند و صورتشان ۱ است.
- ۱۰ - بازه $(0, 2)$.
- ۱۱ - مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب.

فعالیت

(الف) بین 0 و 1 دو عدد گویای دلخواه بنویسید.

(ب) در بازه $(0, 1)$ چهار عدد گویای دیگر بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

(پ) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

(ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(ث) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

(ج) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

نتیجه فعالیت بالا بیان می‌کند که اگر مجموعه‌ای چون A دارای زیرمجموعه‌ای چون B باشد ($B \subseteq A$) به طوری که B نامتناهی باشد آنگاه بناچار خود A نیز نامتناهی است. در نتیجه چون اعداد گویای واقع در بازه $(0, 1)$ نامتناهی هستند پس Q هم نامتناهی است و به همین ترتیب $\mathbb{R}$ هم نامتناهی است. ($Q \subseteq \mathbb{R}$) پرسش: با توجه به شرایط بالا اگر A متناهی باشد در مورد B چه می‌توان گفت؟

یادداشت تاریخی: اعداد اول یکی از قدیمی‌ترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در دوره معاصر نیز یکی از جذابترین شاخه‌های رشته ریاضیات نظریه اعداد است که به بررسی اعداد صحیح و خواص آن می‌پردازد. حدود ۳۵۰ سال قبل از میلاد مسیح اقلیدس ثابت کرد که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد. عبارت بهتر ثابت کرد مجموعه اعداد اول نامتناهی است. جالب است بدانید که این اثبات به روش برهان خلف انجام می‌شود و هنوز در طی سالیان سال نتوانسته‌اند اثباتی ساده‌تر از اثبات اقلیدس بیابند.

تمرین ۷.۱. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

- ۱ - مجموعه کلمات بکار رفته در کتاب ریاضی دهم.
- ۲ - مجموعه مضارب مثبت عدد ۵.
- ۳ - مجموعه پلنگ‌های زنده در قاره آفریقا.
- ۴ - مجموعه تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$.
- ۵ - مجموعه تمام اعدادی که در تقسیم بر ۵ باقیمانده ۱ دارند.
- ۶ - مجموعه باقی‌مانده‌ها در تقسیم اعداد طبیعی بر عدد ۷.
- ۷ - مجموعه تمام موبایل‌های تولید شده در ۲۰ سال گذشته.

بیشتر بدانیم: همانطور که از کلاس نهم می دانید چنانچه دو مجموعه دارای تعداد اعضای برابر باشند آن دو مجموعه لزوماً برابر نیستند. مثلاً دو مجموعه

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$

هر دو دارای سه عضو می باشند اما برابر نیستند. اما برابر بودن تعداد اعضا باعث می شود اصطلاح دیگری در مورد این دو مجموعه بکار رود. اگر بتوان بین اعضای دو مجموعه یک تناظر یک به یک برقرار کرد در این صورت گویند دو مجموعه هم ارز یا هم عدد هستند. منظور از تناظر یک به یک این است که به هر عضو مجموعه A یک و فقط یک عضو از مجموعه B نظیر کرد و بعکس. در مورد مثال بالا تناظر بدین صورت است که :

$$1 \longleftrightarrow a \quad 2 \longleftrightarrow b \quad 3 \longleftrightarrow c$$

توجه داشته باشید که این تناظر باید اصطلاحاً یک به یک باشد. مثل تناظر بین انسان ها و اثر انگشتشان. هر انسانی یک اثر انگشت دارد و هر اثر انگشتی فقط متعلق به یک انسان است. حال موضوع زمانی جالب تر می شود که بدانید $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ هم هم ارز یا هم عدد هستند. برای ایجاد تناظر به این صورت عمل می کنیم که اگر n عددی طبیعی باشد دو حالت رخ می دهد یا زوج است یا فرد. اگر زوج بود آن را به $\frac{n}{2}$ نظیر می کنیم و اگر فرد بود آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نظیر می کنیم. می توان ثابت کرد که این تناظر یک به یک است. چند مورد ابتدای این تناظر را در زیر می بینید.

$$1 \longleftrightarrow \frac{1-1}{2} = 0$$

$$2 \longleftrightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$3 \longleftrightarrow \frac{1-3}{2} = -1$$

$$4 \longleftrightarrow \frac{4}{2} = 2$$

$$5 \longleftrightarrow \frac{1-5}{2} = -2$$

در فصول بعدی که مفهوم تابع را درس خواهیم داد راحت تر می توان ضابطه تناظر را بیان کرد.

۲.۱ متمم یک مجموعه

۱.۲.۱ مجموعه مرجع

جهت روشن شدن لزوم در نظر گرفتن یک مجموعه بعنوان مجموعه مرجع مجموعه $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید. اگر از شما بخواهند که اعضای مجموعه را بنویسید چه اعدادی را خواهید نوشت؟ جوابهای احتمالی شما بصورت زیر است:

$$(۱) \quad A = \{1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد طبیعی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۲) \quad A = \{0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حسابی را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۳) \quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد صحیح را در نظر گرفته باشید}$$

$$(۴) \quad A = [-2, 3] \leftarrow \text{اگر در ذهن خود اعداد حقیقی را در نظر گرفته باشید}$$

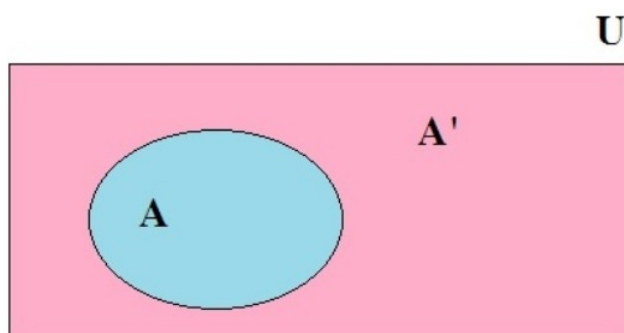
پس همانطور که مشاهده می کنید برای مجموعه می توان حالت های مختلف را در نظر گرفت و جواب یکتایی بدست نمی آید و این ابهام در تعریف مجموعه A چندان خوشایند نیست. چنانچه مجموعه را بصورت :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

تعریف کنیم دیگر تکلیف روشن است و می دانیم جواب چیست. در اینجا نبود یک مجموعه مرجع باعث بروز چنین مشکلی شد. اما با در نظر گرفتن مجموعه های $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}, \mathbb{N}$ بترتیب مجموعه های ۱، ۲، ۳، ۴ بدست می آیند. پس با تغییر مجموعه بعد از علامت $\in$ اعضای مجموعه نیز تغییر می کنند. چنین مجموعه هایی را مجموعه مرجع گویند.

تعریف ۶.۱. در هر مبحث مجموعه ای که همه مجموعه های مورد بحث زیر مجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می نامند و با حرف U نشان می دهند. در این حالت اگر $A \subseteq U$ مجموعه ای دلخواه باشد، $U - A$ را با نماد A' نشان می دهیم و آن را متمم A می نامیم. به عبارت بهتر A' شامل اعضای از U است که در A نیستند.

در شکل زیر رابطه بین مجموعه های A, A', U دیده می شود.



بطور معمول در هر بحثی مجموعه مرجع را معرفی می‌کنند. چنانچه در بحثی مجموعه مرجع را معرفی نکردیم شما می‌توانید بزرگترین مجموعه موجود را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. وقتی صحبت از اعداد باشد بزرگترین مجموعه ممکن همان $\mathbb{R}$ است. در حالت کلی برای نوشتن یک مجموعه به صورت استاندارد می‌نویسیم $\{x \text{ دارای خاصیت } p(x) \mid x \in U\}$ در این جا U مجموعه مرجع است و $p(x)$ خاصیتی است که x دارای آن است.

یادداشت تاریخی: آیا مجموعه مرجع به معنای مطلق وجود دارد؟ یعنی مجموعه‌ای چون U به طوری که شامل هر مجموعه‌ای که شما تصور کنید باشد. تا ابتدای قرن بیستم وجود چنین مجموعه‌ای فرضی مسلم بود. برتراند راسل ریاضی دان و فیلسوف نامدار انگلیسی در ابتدای قرن بیستم ثابت کرد چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. پارادوکس راسل در همین ارتباط است و برای مطالعه بیشتر می‌توانید در گوگل عبارت پارادوکس راسل را جستجو کنید.

مثال ۴.۱. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$A = \{1, 3, 5, \dots\}$	$U = \mathbb{N}$
$B = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$
$C = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{W}$
$D = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{R}$
$E = [-\infty, -2)$	$U = \mathbb{R}$
$F = [-\infty, -2)$	$U = (-\infty, 0)$
$G = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$	$U = [0, 1]$
$H = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{R}$

مثال ۵.۱. اگر U مجموعه مرجع دلخواهی باشد و $A \subseteq U$ باشند طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$$a) A \cup A' = \quad b) A \cap A' = \quad c) \emptyset' = \quad d) U' =$$

مثال ۶.۱. فرض کنید $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, q\}$ و $A = \{a, e, g, h, m, n, l\}$ و $B = \{a, b, c, d, f, g, l\}$ باشند. جدول زیر را کامل کنید.

$(A')'$	{ }
$A' \cap B'$	{ }
$A' \cup B'$	{ }
$(A \cap B)'$	{ }
$(A \cup B)'$	{ }
$A \cap B'$	{ }
$A - B$	{ }

۲.۲.۱ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

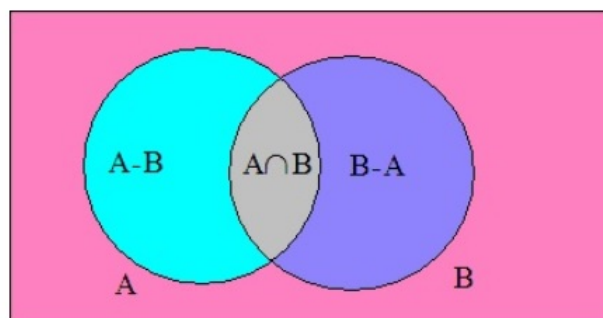
فرض کنید تعداد اعضای مجموعه های A, B معلوم باشد. می خواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را بر حسب $n(A)$ و $n(B)$ بیابیم. (تعداد اعضای یک مجموعه را هم با نماد $|A|$ و هم با نماد $n(A)$ نشان می دهند) ممکن است تصور کنید که جواب واضح است و برابر است با عدد $n(A) + n(B)$ اما این نادرست است. چرا که اگر $U = \mathbb{N}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ آنگاه :

$$4 = n(A \cup B) \neq n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6$$

دلیل آن ها ساده است. هنگامی که می نویسیم $n(A) + n(B)$ در واقع اعضای مشترک دوبار شمارش شده اند. یعنی $n(A \cap B)$ یکبار در هنگام شمارش اعضای A و یک بار در شمارش اعضای B حساب شده است. لذا برای یافتن تعداد درست باید یکبار $n(A \cap B)$ را از $n(A) + n(B)$ کم کنیم. پس جواب درست بصورت زیر است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به شکل زیر دقت کنید. می توان درستی رابطه فوق را از روی نمودار ون زیر تحقیق کرد.



تذکر مهم: از روی شکل فوق روابط جالب دیگری بین اعضای مجموعه های $A - B$ و $A \cap B$ بدست می آید. این روابط بصورت زیر هستند که خودتان براحتی می توانید صحت آنها را تحقیق کنید.

$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = n(A \cup B)$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

درس را با ذکر چند مثال پی میگیریم.

مثال ۷.۱. در یک کلاس مدرسه ۳۰ دانش آموز وجود دارد. ۲۲ نفر از آنها فوتبال بازی می کنند و ۱۸ نفر هم والیبال بازی می کنند. چند نفر هم فوتبال بازی می کنند و هم والیبال؟

مثال ۸.۱. در یک جمع ۴۰ نفره ۲۰ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه. چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند.

مثال ۹.۱. از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ یا ۷ بخش پذیر باشد؟ چند عدد بر ۵ بخش پذیر است اما بر ۷ بخش پذیر نیست؟ چند عدد نه بر ۵ بخش پذیر است نه بر ۷؟

تمرین ۸.۱. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۲۱ نفر به زبان انگلیسی، ۱۷ نفر به زبان فرانسه و ۱۰ نفر به هر دو زبان می توانند صحبت کنند. در این کلاس چند نفر هستند که به هیچ یک از این دو زبان صحبت نمی کنند؟

تمرین ۹.۱. در یک مدرسه، ۲۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۲ نفر در تیم والیبال عضو هستند. ۴ نفر نیز در هر دو تیم عضو هستند. چند نفر از دانش آموزان مدرسه، در دست کم یکی از ۲ تیم ورزشی مدرسه هستند؟

تمرین ۱۰.۱. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته :

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید داشته اند.

ب) فقط از شرکت A خرید داشته اند.

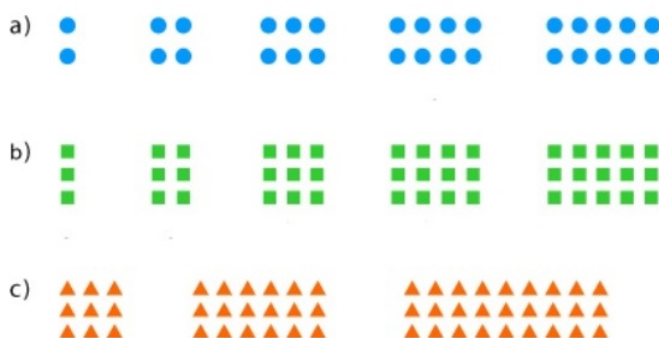
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند.
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

۳.۱ الگو و دنباله

۱.۳.۱ الگو

دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی‌کاری شده و یا مارپیچ‌های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد می‌باشد که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشد. ریاضیات به عنوان ملکه علوم، یکی از رسالت‌های مهم خود را مدل سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنها می‌داند. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارتست از علم مطالعه الگوها. در این بخش برخی الگوهای هندسی و نیز الگوهای عددی متناظر با آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۱۰.۱. به شکل زیر دقت کنید در هر مورد a, b, c چه ارتباطی بین جملات است؟ در هر مورد چند جمله بعدی را بنویسید. آیا در حالت کلی می‌توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟ (رسم بر اینست که جمله اول را با نماد a_1 جمله دوم را با نماد a_2 و جمله n ام را با a_n نشان دهند. شماره‌های جمله که به شکل کوچک و پایین حرف انگلیسی نوشته شده‌اند را اندیس گویند)

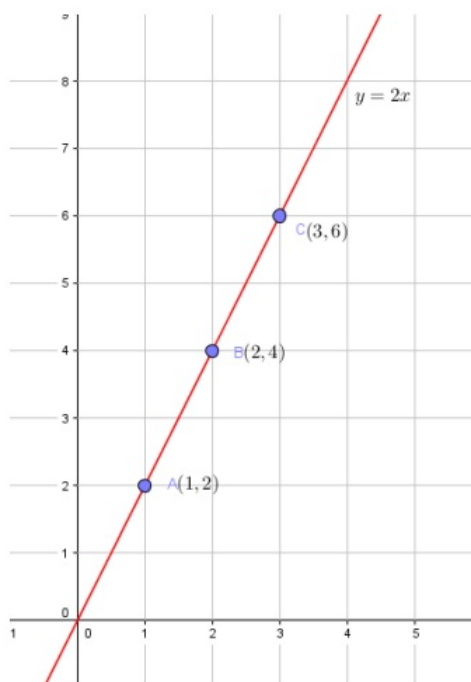


همانطور که در مثال بالا دیده شد اختلاف هر جمله از جمله قبلی مقدار ثابتی است. این نوع الگوها را الگوی خطی می‌نامیم چرا که به شکل معادله درجه اول $t_n = an + b$ است. در اینجا t_n جمله n ام الگو است. در نمودار زیر مشخص کرده ایم که در قسمت a اختلاف هر جمله از جمله قبلی ۲ واحد است و لذا الگوی خطی

دارد.

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} \dots$$

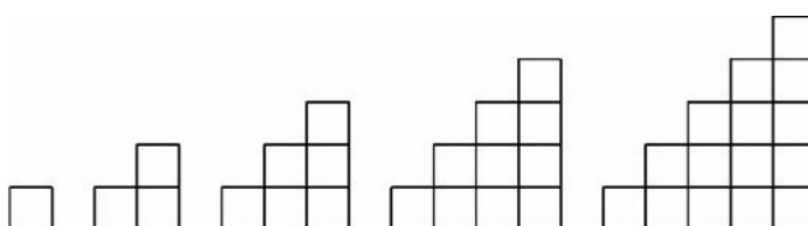
مثال ۱۱.۱. در یک الگوی خطی جمله چهارم ۱ و جمله هشتم ۱- است. جمله چندم آن برابر ۴۷- است؟



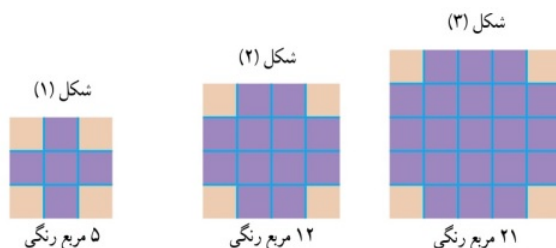
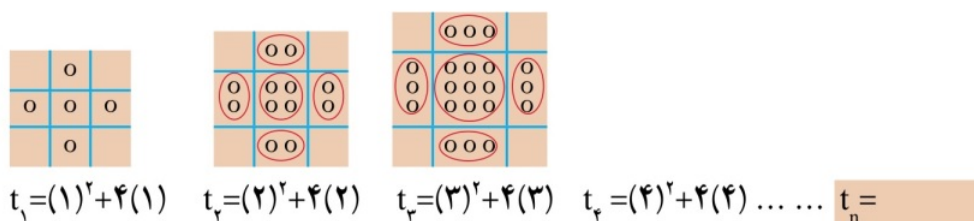
شکل ۳.۱: نمودار یک الگوی خطی

همانطور که در شکل ۳.۱ مشاهده می کنید اعضای دنباله $2, 4, 6, \dots$ در واقع عرض نقاط $A, B, C, \dots$ روی خط $y = 2x$ هستند. به همین علت هم به این الگوها خطی گویند. اگر خوب به معادله آن که بر حسب متغیر n نوشته شده است دقت کنید بلافاصله به یاد معادله خط از کلاس نهم خواهید افتاد یعنی عبارت $y = ax + b$. اما همه ی الگوها لزوماً خطی نیستند. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱۲.۱. با توجه به شکل زیر تعداد مربع ها را در هر مرحله بنویسید. آیا این الگو خطی است؟ چگونه می توان دستوری برای جمله n ام آن بدست آورد؟



مثال ۱۳.۱. الگوی ۵, ۱۲, ۲۱, ۰۰۰ را در نظر بگیرید. آیا الگو خطی می باشد؟ به کمک دو شکل زیر سعی کنید جمله n ام آن را بیابید.



$$t_1 = (1+2)^2 - 4 \quad t_2 = (2+2)^2 - 4 \quad t_3 = (3+2)^2 - 4 \quad t_4 = (4+2)^2 - 4 \quad \dots \quad t_n =$$

تذکر : در مثال بالا نتیجه جالب و پرکاربرد $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ را بدست آوردیم. مشابه به مجموع فوق می توان مجموع مربعات و مکعبات اعداد طبیعی را هم بدست آورد. تلاش شما برای اثبات روابط بسیار مهم زیر خالی از اجر نیست!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

۲.۳.۱ دنباله ها

همانطور که در بخش قبل دیدیم از روی الگوهای هندسی می توان اعدادی را استخراج کرده و به دنبال هم نوشت. اعداد بدست آمده را از چپ به راست می نویسیم و ترتیب آنها را هم حفظ می کنیم. در واقع این نکته بسیار مهمی است که اعداد نامنظم کنار هم قرار نگرفته اند بلکه دارای نظم و ترتیب هستند.

تعریف ۷.۱. به هر تعداد از اعداد که آنها را پشت سر هم نوشته باشیم یک دنباله گوئیم. هر عدد که در دنباله قرار دارد را یک عضو دنباله گوئیم و جمله n ام یا جمله عمومی دنباله را با نماد a_n نمایش می دهیم. نماد رایج برای نوشتن جمله عمومی یک دنباله نماد $\{ \}$ است. مثلاً می نویسم $a_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$ یا معادلاً عبارت

$$\left\{ \frac{n^2 + 1}{5n} \right\}$$

تمرین ۱۱.۱. پنج جمله اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

$$b_n = (n + 2)^{-n}$$

$$c_n = n^n$$

$$d_n = -n^2 + 8n$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f_n = \frac{n}{n+2}$$

$$g_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$p_n = \sqrt[n]{n}$$

مثال ۱۴.۱. الگوهای عددی زیر همگی مثال هایی برای دنباله محسوب می شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

a) $-1, -2, -3, -4, \dots$

b) $5, 18, 31, 44, \dots$

c) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

d) $-2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

e) $1, 4, 9, 16, \dots$

f) $1, 2, 4, 7, \dots$

h) $3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots$

k) $-1, 8, -27, 64, \dots$

l) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

m) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$

n) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

p) $2, 8, 24, 64, 160, \dots$

یادداشت تاریخی: لئوناردو فیبوناتچی (حدود ۱۱۷۰-حدود ۱۲۵۰) نخستین ریاضیدان بزرگ اروپا در قرن سیزدهم است. برای مطالعه بیشتر در گوگل فیبوناتچی را جستجو کنید.

در اینجا ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه یافتن جمله عمومی از روی چند جمله اول هر دنباله ای در حالت کلی ممکن نیست. مثلاً دنباله اعداد اول دارای جمله عمومی نیست. دوم اینکه از روی چند جمله اول یک دنباله نمی توان بصورت منحصر بفرد جمله عمومی را یافت. مثلاً دنباله قسمت e مثال بالا را که جمله عمومی آن بصورت $a_n = n^2$ بدست آمده می توانست بصورت $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n^2$ نیز باشد چرا که دقیقاً همین اعداد ۱، ۴، ۹، ۱۶ را تولید می کند اما مشخص است که از جمله چهارم به بعد این دو دنباله کاملاً متفاوت هستند.

مثال ۱۵.۱. الف : جمله عمومی دنباله ای بصورت $a_n = n^2 - 10n + 18$ است. کوچکترین جمله دنباله جمله چندم است. ب: جمله عمومی یک دنباله بجای اینکه بر حسب n بیان شود بر حسب $3n - 1$ بیان شده است. به عبارت بهتر داریم : $a_{3n-1} = \frac{6n-2}{3n+3}$ جمله بیستم دنباله چه عددی است؟ آیا می توان جمله عمومی دنباله را بدست آورد؟

بیشتر بدانیم: دو نوع خاص دنباله وجود دارد که از اهمیت ویژه ای برخوردار است. اول دنباله های یکنوا: دنباله ای که جملات آن مرتبا از اولین جمله افزایش یابند را دنباله صعودی گوئیم. در مقابل چنانچه دنباله ای از اولین جمله شروع به کاهش کند ، دنباله را نزولی گوئیم. توجه کنید که یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد و نه نزولی. منظور از دنباله یکنوا دنباله ای است که یا صعودی باشد یا نزولی. دوم دنباله های کراندار: دنباله ای را کراندار گوئیم که همواره جملات آن بین دو عدد حقیقی قرار گیرند.

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله صعودی و کراندار است}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نه صعودی است و نه نزولی اما کران دار است}$$

$$c_n = \frac{1}{n} \rightarrow \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \rightarrow \text{دنباله نزولی و کران دار است}$$

$$d_n = (-1)^n n^2 \rightarrow \{-1, 4, -9, 16, -25, 36, \dots\} \rightarrow \text{نه صعودی و نه نزولی و نه کران دار}$$

۳.۳.۱ دنباله حسابی

تعریف ۸.۱. دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند. فرض کنید جمله اول دنباله a و قدر نسبت عدد d باشد در این صورت جملات ابتدایی دنباله بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{a+d}_{a_2} \quad \underbrace{a+2d}_{a_3} \quad \underbrace{a+3d}_{a_4} \quad \dots \quad \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

به این ترتیب جمله عمومی دنباله حسابی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = a + (n - 1)d$$

تعداد جملات n ، قدر نسبت d ، جمله اول a_1

مثال ۱۶.۱. در دنباله حسابی $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ جمله ۱۸ ام را بیابید. آیا جمله ای وجود دارد که برابر با ۲۴- شود؟

مثال ۱۷.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{11} = 48$ ، $a_5 = 24$ مطلوبست محاسبه a_{20} .

مثال ۱۸.۱. در دنباله حسابی $200, 204, 208, \dots$ کدام جمله صفر است؟

نکته مهم: فرض کنید سه عدد a, b, c تشکیل دنباله حسابی داده باشند. در این صورت باید $b - a = c - b$ در نتیجه باید $b = \frac{a+c}{2}$. در این حالت b را واسطه حسابی بین a و c گوئیم.

مثال ۱۹.۱. در یک دنباله حسابی غیر ثابت (یعنی $d \neq 0$) چند جمله اول بصورت زیر است. جمله اول و قدرنسبت را بیابید.

$$a + 2, a^2 + 2a + 2, a^3 + 2 \dots$$

مثال ۲۰.۱. فرض کنید $b \neq 1$ باشد. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{1+\sqrt{b}}, \frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-\sqrt{b}}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند.

مثال ۲۱.۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۲.۱. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

مثال ۲۳.۱. بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه حسابی درج کنید به عبارت بهتر بین این دو عدد ۳ عدد چنان قرار دهید که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال ۲۴.۱. در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است، مجموع سه جمله اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر $60\sqrt{2}$ است. همچنین می دانیم $a_{10} = \frac{3}{4}a_{15}$. این دنباله چند جمله دارد؟

مثال ۲۵.۱. فرض کنید a_s, a_r, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی باشند بطوریکه $m+n = r+s$ باشد. نشان دهید در این حالت باید داشته باشیم $a_m + a_n = a_r + a_s$. بویژه اگر $m+n$ زوج باشد آنگاه $a_{m-n} + a_{n+k} = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ در حالت خاص

مثال ۲۶.۱. در یک دنباله حسابی داریم $a_{13} + a_{18} = 130$ ، $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 120$ است. جمله ۳۰ ام دنباله را بدست آورید.

مثال ۲۷.۱. مجموعه A شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ است. مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. مطلوبست محاسبه $n(A \cap B)$.

تمرین ۱۲.۱. فرض کنید که p^2, q^2, r^2 سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. نشان دهید که سه عدد

$\frac{1}{p+q}$ ، $\frac{1}{r+p}$ ، $\frac{1}{q+r}$ نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۱۳.۱. اعداد $1 + 2\sqrt{x}$ ، $2 + 3\sqrt{x}$ ، $6 - 7\sqrt{x}$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۱۴.۱. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲ و مجموع مربعات ۲۴۶ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۱۵.۱. در یک دنباله حسابی $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = 0$ است. در این صورت حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{3n-1}}{a_4 + a_7 + a_{10} + \dots + a_{3n+1}}$$

تمرین ۱۶.۱. در دنباله حسابی $0, -17, -161, -152, \dots$ چند جمله منفی است؟

بیشتر بدانیم: می خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را در حالت کلی بیابیم. اگر این مجموع را با S_n نمایش دهیم هدف یافتن عبارت

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

است. بدین منظور همان روشی را که کارل فردریش گاوس معروف در دوره دبستان انجام داد را بکار میگیریم.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_n)$$

حال اگر مقدار جملات را از روی جمله عمومی جایگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$2S_n = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \dots + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ جمله}}$$

بنابر این به دستور جالب زیر می رسم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

الف) درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$

c) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

d) $3 + 7 + 11 + \dots + 79 = 820 \implies n = ?$

ب) در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از دستور $S_n = 2n^2 + n$ حاصل می شود. مطلوبست محاسبه a_n, d .

ج) مجموع چند جمله از دنباله $۲۶, ۲۱, ۱۶, \dots$ برابر ۷۴ است؟

۴.۳.۱ دنباله هندسی

می گویند یک هندی برای اولین بار شطرنج را اختراع نمود و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شطرنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر جایزه ای درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و ریاضیدان، درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و توقع زیادی ندارم فقط پادشاه لطف نموده دستور دهند به ازای خانه اول صفحه شطرنج یک دانه گندم، خانه دوم دو دانه گندم، خانه سوم چهار دانه گندم و بدین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه قبل گندم به من اهدا نمایند. پادشاه و اطرافیان درخواست مخترع را به دیده حقارت و تمسخر نگریستند و خزانه دار مامور شد فی الفور خواسته مخترع را برآورده سازد. ساعاتی بعد خزانه دار به حضور پادشاه رسید و در کمال ناباوری همگان گفت: پادشاه به سلامت باد اگر کلیه خزائن کشور را از گندم تهی نموده به مخترع دهیم باز هم تعداد زیادی از خانه های شطرنج باقی می ماند و از برآوردن خواسته مخترع عاجزیم!

جدای از صحت و سقم داستان فوق بیاید امکان تهیه گندم را بررسی کنیم. مجموع گندم خواسته شده برابر است با :

$$۲^۰ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + \dots + ۲^{۶۴} = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

وزن هر دانه گندم را $۰/۴$ گرم بگیرید در این صورت حاصل برابر است با

$$۰/۴ \times ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸۳۸۲۰۶۴۶ \text{ gr} = ۷۳۷۸۶۹۷۶۲۹۴۸ \text{ ton}$$

تولید این مقدار گندم تقریباً هزار سال طول می کشد! در واقع هدف از بیان این داستان معرفی دنباله های هندسی و سرعت شگفت انگیز رشد یا زوال آنهاست.

تعریف ۹.۱. دنباله هندسی، دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله مینامیم. جمله اول دنباله هندسی $a \neq ۰$ است. قدرنسبت را با q نشان می دهیم. در حالت های خاص اگر $q = ۱$ و یا $q = ۰$ باشد دنباله های خاصی پدید می آیند. اگر $q = ۰$ باشد دنباله بصورت $a, ۰, ۰, \dots$ و اگر $q = ۱$ باشد دنباله ثابت $a, a, a, \dots$ حاصل می شوند.

برای یافتن جمله عمومی یک دنباله هندسی فرض می کنیم جمله اول آن a و قدرنسبت q باشد در این صورت ترتیب جملات بصورت زیر است:

$$\underbrace{a}_{a_1} \quad \underbrace{aq}_{a_2} \quad \underbrace{aq^2}_{a_3} \quad \dots \quad \underbrace{aq^{n-1}}_{a_n} \quad \dots$$

بنابراین جمله n ام یا جمله عمومی دنباله هندسی بصورت زیر حاصل می شود:

$$a_n = aq^{n-1}$$

تعداد جملات $n =$ ، قدر نسبت $q =$ ، جمله اول $a =$

مثال ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. آنهایی را که هندسی هستند مشخص کرده و قدر نسبت و جمله عمومی آنها را بیابید.

a) ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸,

b) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$

c) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

d) ۵, ۵, ۵, $\dots$

e) ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, $\dots$

f) ۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, $\dots$

g) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{2}, \dots$

h) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

k) ۳, $\sqrt{3}, 1, \dots$

مثال ۲۹.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ جمله چندم برابر $\frac{1}{128}$ است؟

مثال ۳۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_5 = 162$, $a_8 = 4374$ است. جمله سوم را بدست آورید.

مثال ۳۱.۱. سه عدد a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. ثابت کنید: $b^2 = ac$. (در این حالت b را واسطه هندسی بین a و c گویند.)

مثال ۳۲.۱. سه عدد $a + 5, 4a + 2, 10a - 4$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. قدر نسبت را بیابید.

مثال ۳۳.۱. پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

مثال ۳۴.۱. سه عدد $81^{\frac{1}{4}}, 3^{b^2}, 3^b$ تشکیل دنباله هندسی داده اند. b را بیابید.

مثال ۳۵.۱. در دنباله $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}, \dots$ جمله سیزدهم را بیابید.

مثال ۳۶.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{130}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{260}{9} \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

مثال ۳۷.۱. در یک دنباله هندسی رابطه های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله اول و قدرنسبت را بدست آورید.

تذکر مهم: در یک دنباله هندسی که جمله اول آن مثبت است چنانچه $q > 1$ باشد دنباله افزایشی است و اگر $0 < q < 1$ باشد دنباله کاهشی است. اگر $q = -1$ باشد دنباله متناوب است و اگر $q < 0$ باشد دنباله نوسانی است.

مثال ۳۸.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی اند. قدرنسبت دنباله هندسی را بیابید.

مثال ۳۹.۱. چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر 2^0 و مجموع دو عدد بزرگتر برابر 4^5 است. بزرگترین این اعداد کدامست؟

تمرین ۱۷.۱. مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ و جمله وسطی $3\sqrt{2}$ است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۸.۱. در یک دنباله هندسی حاصلضرب سه جمله اول -8 و حاصلجمع جملات اول و سوم برابر -5 است. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۱۹.۱. در یک دنباله هندسی $a_{20} - a_{19} = 1024$, $a_{10} - a_9 = 1$ است. جمله پنجم را بیابید.

تمرین ۲۰.۱. در یک دنباله هندسی $a_2 + a_4 + a_6 = 546$, $a_3 + a_5 + a_7 = 1638$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر 11664 می شود؟

تمرین ۲۱.۱. عدد 325 را به سه قسمت چنان تقسیم کنید که سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر 15^0 باشد.

تمرین ۲۲.۱. جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2} - 1$ است. جمله دوم دنباله چه عدد صحیحی باشد تا جمله ششم برابر $12\sqrt{2} + 17$ شود؟

تمرین ۲۳.۱. در یک دنباله حسابی و غیرثابت، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

بیشتر بدانیم: در این قسمت می‌خواهیم مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را بدست آوریم. اگر جمله اول را با a و قدر نسبت را با q نشان دهیم هدف محاسبه عبارت $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ است. بدین منظور داریم:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

کم کردن طرفین ۲ رابطه بالا

$$qS_n - S_n = aq^n - a$$

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

n = تعداد جملات q = قدر نسبت a = جمله اول

بویژه در یک حالت خاص که $|q| < 1$ است مشاهده می‌کنیم که چنانچه n به قدر کافی بزرگ باشد آنگاه $q^n \approx 0$ است و لذا رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - q}$$

۱ - در یک دنباله هندسی $S_3 = 9$ ، $S_6 = -63$ است مطلوبست محاسبه S_1 .

۲ - مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ را بیابید.

۳ - اگر $|q| < 1$ باشد حاصل $(1 - q + q^2 - q^3 + \dots)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$ را بدست آورید.

۴ - در یک دنباله هندسی داریم $S_n = 17$. مطلوبست محاسبه q .

۵ - حاصل عبارت $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n$ را بیابید.

۶ - تویی از ارتفاع ۵ متری پرتاب می‌شود و پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه نصف ارتفاع قبلی بالا می‌رود تا ساکن شود. کل مسافتی که توپ طی می‌کند را محاسبه کنید.

تمرین الگو، دنباله های حسابی و هندسی

تمرین ۲۴.۱. با توجه به شکل زیر و الگوی آن در شکل پانزدهم چند دایره سیاه رنگ دیده می شود؟



تمرین ۲۵.۱. کوچکترین جمله ی دنباله های زیر را بیابید.

a) $a_n = n^2 - 20n$

b) $a_n = n + \frac{16}{n}$

تمرین ۲۶.۱. بزرگترین جمله دنباله های زیر را بیابید.

a) $a_n = -2n^2 + 20n - 15$

b) $a_n = \frac{1}{n^2 + 10n + 5}$

تمرین ۲۷.۱. دنباله $a_n = n + 3 + \frac{8}{n+1}$ چند جمله صحیح دارد؟

تمرین ۲۸.۱. دنباله های زیر را بررسی کنید. کدام هندسی یا حسابی اند؟

a) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

b) $2, 5, 9, 14, \dots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{16}, \dots$

d) $\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2, 4 - 2\sqrt{2}, \dots$

تمرین ۲۹.۱. دنباله $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots$ مفروض است. جمله عمومی آن را بنویسید.

تمرین ۳۰.۱. فرض کنید a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{2b}$ و $\frac{1}{b+c}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

تمرین ۳۱.۱. اعداد فرد را بصورت $(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$ دسته بندی کرده ایم. در دسته سی ام مجموع دو جمله اول و آخر را بیابید.

تمرین ۳۲.۱. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد قدر نسبت را بیابید.

تمرین ۳۳.۱. در یک دنباله حسابی جملات اول، نهم و چهل و نهم به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدرنسبت را بیابید.

تمرین ۳۴.۱. اعداد a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, c, b تشکیل دنباله هندسی می دهند. قدرنسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

تمرین ۳۵.۱. دستوری برای جمله عمومی دنباله $\frac{5}{3}, \frac{8}{6}, \frac{11}{11}, \frac{14}{18}, \dots$ بیابید.

تمرین ۳۶.۱. در دنباله زیر چند جمله مشترک کمتر از 190 وجود دارد؟

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{cases}$$

تمرین ۳۷.۱. بین دو عدد a و $a+8$ سه واسطه هندسی درج کرده ایم. اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد، a را بدست آورید.

تمرین ۳۸.۱. در دنباله هندسی که جمله اول آن 10 و قدرنسبت آن 5 است چند جمله کمتر از 10000 داریم؟

تمرین ۳۹.۱. مجموع جملات یک دنباله هندسی $(|q| < 1)$ برابر 8 و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله اول را بیابید.

تمرین ۴۰.۱. حاصل عبارت $(1 - x + x^2 - \dots + x^8)(1 + x + x^2 + \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ را بیابید.

۴.۱ تست‌های فصل اول

۱- اعداد $۵p - ۱$, $۳p + ۴$, $۲p + ۳$ سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد عددی هستند. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۴

۲- اگر $A = \sqrt{۲۵۲}$ باشد حاصل $\frac{۱}{A - ۰.۲۵}$ کدام است؟

- (۱) ۴۴۱ (۲) ۴۴۲ (۳) ۴۴۳ (۴) ۴۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۳- عرض یک مستطیل ۴ متر است. اگر اندازه‌ی طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مربع قطر مستطیل کدام است؟

- (۱) $۵(۸ + \sqrt{۵})$ (۲) $۶(۸ + \sqrt{۵})$ (۳) $۸(۵ + \sqrt{۵})$ (۴) $۸(۶ + \sqrt{۵})$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۴- اگر جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی ۴ و حد مجموع جملات این تصاعد ۱۶ باشد جمله‌ی چهارم کدام است؟

- (۱) $\frac{۹}{۱۶}$ (۲) $\frac{۹}{۳۲}$ (۳) $\frac{۲۷}{۱۶}$ (۴) $\frac{۲۷}{۳۲}$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۴

۵- اگر S_n مجموع جمله اول از یک تصاعد عددی و سه جمله اول دنباله S_n به صورت ۳ , $\frac{۳}{۲}$, $\frac{۱}{۲}$ باشد جمله چهارم این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{۷}{۲}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{۹}{۲}$ (۴) ۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۵

۶- اگر A مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ و B مجموعه اعداد صحیح با قدر مطلق کمتر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در Z با پایان است؟

- (۱) $A \cap B'$ (۲) $A' \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۷- قطار سریع‌السیر به طور آزمایشی، فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است، طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود، تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۸- در آرایه‌ی مربعی مقابل، تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۱

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۶

۹- تصاعد هندسی ... و $\frac{1}{p}$ و x و ۲ غیرنزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

$$\frac{41}{32} (1) \quad \frac{21}{16} (2) \quad \frac{11}{8} (3) \quad \frac{23}{16} (4)$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۶

۱۰- ده عدد جملات متوالی از دنباله‌ی حسابی‌اند، مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر آن‌ها ۱۳۰ می‌باشد، کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟

$$3 (1) \quad 4 (2) \quad 5 (3) \quad 6 (4)$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۱- در دنباله‌ی مثلثی هر جفت از جمله‌های متوالی را با هم جمع می‌کنیم. اعداد حاصل کدام نوع دنباله است؟

$$(1) \text{ مربعی} \quad (2) \text{ هندسی} \quad (3) \text{ حسابی} \quad (4) \text{ فیوناتچی}$$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۷

۱۲- اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی از تصاعد هندسی‌اند، واسطه عددی بین a و b کدام است؟

$$2/5 (1) \quad 2 (2) \quad 1/5 (3) \quad \sqrt{2} (4)$$

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۷

۱۳- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟

$$81 \frac{3}{8} (1) \quad 81 \frac{7}{8} (2) \quad 82 \frac{3}{8} (3) \quad 83 \frac{1}{8} (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۹

۱۴- مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$ است. مجموع جملاتی از این تصاعد که از

جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

$$132 (1) \quad 145 (2) \quad 148 (3) \quad 154 (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۹

۱۵- در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جمله‌ی قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله‌ی اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جمله‌ی اول

کدام است؟

$$1 (1) \quad 2 (2) \quad 3 (3) \quad 4 (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۶- در دنباله‌ی فیوناتچی، دومین عدد بخش‌پذیر بر ۱۳ کدام است؟

$$364 (1) \quad 377 (2) \quad 390 (3) \quad 403 (4)$$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۰

۱۷- مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با

شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) ۱۸

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۰

۱۸- اگر $k \in \mathbb{Z}$ (عدد صحیح نسبی) آنگاه مجموعه اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

- (۱) $2k-5$ (۲) $2k+6$ (۳) $3k-1$ (۴) $3k+1$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۱

۱۹- در تصاعد هندسی $1, 2, 4, \dots$ ، مجموع چهارده جمله‌ی اول چند برابر مجموع هفت جمله‌ی اول آن است؟

- (۱) ۶۵ (۲) ۶۳ (۳) ۱۲۷ (۴) ۱۲۹

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۰

۲۰- جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۱- اگر $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $B \cap C = \emptyset$ (۲) $B \cap C \neq \emptyset$ (۳) $A \cap (B \cap C) = \emptyset$ (۴) $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۲- شخص در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده، در هر ماه به‌اندازه‌ی $\frac{1}{4}A$ بیش‌تر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند، تا مقدار

پس‌انداز یک ماه آن به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چه قدر بوده است؟

- (۱) ۱۶۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۲۲۰۰ (۴) ۲۴۰۰

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۳- در دنباله‌ی مثلثی $1, 3, 6, \dots$ ، مجموع جملات دهم و یازدهم، کدام است؟

- (۱) ۱۲۱ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۳۲ (۴) ۱۴۴

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۴- در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول

است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۱

۲۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد، ...، (۷، ۹، ۱۱)، (۳، ۵)، (۱) جمله‌ی آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟

(۱) ۴۱۵ (۲) ۴۱۹ (۳) ۴۲۱ (۴) ۴۲۳

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۶- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴ سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی هندسی دهند مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟

(۱) ۴۲۸ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۸۶ (۴) ۴۸۸

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۱

۲۷- اگر $A = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 5, 6\}$ باشند، مجموعه $[A - (A \cap B)] - (A \cup B)$ چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۸- مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله‌ی حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگ‌تر سه برابر مجموع سه جمله کوچک‌تر است. قدر نسبت آن کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۲۹- در دنباله‌ی مثلثی با جمله اول ۱، جمله چهاردهم کدام است؟

(۱) ۸۴ (۲) ۹۸ (۳) ۱۰۵ (۴) ۱۰۸

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

(۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $5 + 2\sqrt{3}$ (۳) $5 + 4\sqrt{3}$ (۴) $7 + 4\sqrt{3}$

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۲

۳۱- به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{117}{16}$ (۲) $\frac{125}{16}$ (۳) $\frac{63}{4}$ (۴) $\frac{127}{8}$

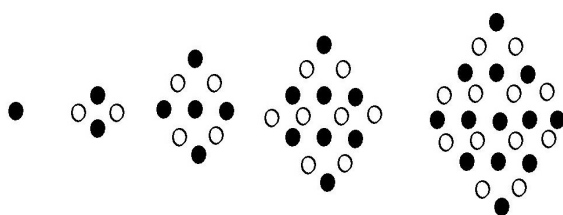
دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۳ (سراسری - آزاد)

۳۲- در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی سوم این تصاعد کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۳- در آرایه‌ی لوزی مقابل تعداد صفرهای توپر، در جمله‌ی یازدهم، کدام است؟



۶۱ (۱)

۶۲ (۲)

۶۳ (۳)

۶۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۸

۳۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهارجمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جمله‌ی اول کدام است؟

۱۳/۴ (۴)

۱۲/۶ (۳)

۱۱/۲ (۲)

۱۰/۸ (۱)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۸

۳۵- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندمین جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۸

۳۶- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد:

...، (۱)، (۲، ۳، ۴)، (۵، ۶، ۷، ۸، ۹)، (۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰)، ...

۱۷۴۸ (۴)

۱۷۲۹ (۳)

۱۷۱۰ (۲)

۱۶۹۱ (۱)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۷- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک تصاعد عددی ۵ و مجموع جمله‌ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله‌ی بیست‌ویکم این تصاعد کدام است؟

۳۸/۵ (۴)

۳۷/۵ (۳)

۳۶ (۲)

۳۵ (۱)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۴

۳۸- در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله‌ای اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این تصاعد کدام است؟

۹ (۴)

۸/۵ (۳)

۸ (۲)

۷/۵ (۱)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۵

۳۹- اعداد $1, X, Y, \frac{5}{3}, \dots$ چهار جمله‌ی اول از یک تصاعد عددی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

۶۸ (۴)

۶۷/۵ (۳)

۶۲/۵ (۲)

۵۷ (۱)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶

۴۰- در یک تصاعد عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت تصاعد هندسی کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

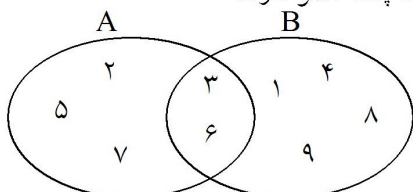
دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۷

۴۱- در بیست جمله‌ی اول تصاعد عددی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۵

۴۲- با توجه به شکل مقابل، اجتماع دو مجموعه $A - (A - B)$ و $B - (B - A)$ چند عضو دارد؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۳- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی‌اند برابر ۱۰۵، مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟

- ۳۸ (۱) ۳۹ (۲) ۴۰ (۳) ۴۱ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۸۹

۴۴- در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

- $\frac{81}{16}$ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۸۹

۴۵- در یک تصاعد عددی جمله‌ی a_n به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۸۹

۴۶- حد مجموع جملات دنباله هندسی $\frac{9}{2}, 8, 6, \dots$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۷- در دنباله مثلثی با جمله اول ۱، در جمله چندم عدد مربع کامل غیر ۱ نوشته است؟

- ۱ (ششم) ۲ (هفتم) ۳ (هشتم) ۴ (نهم)

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۰

۴۸- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع

این هشت عدد کدام است؟

- ۳۰ (۱) $48\sqrt{2}$ (۲) $30(\sqrt{2}+1)$ (۳) $36(\sqrt{2}+1)$ (۴)

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۸

۴۹- در یک تصاعد عددی، جمله ی هفتم نصف جمله ی سوم است. مجموع چند جمله ی اول از این تصاعد برابر صفر است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۸

۵۰- در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

دبیرستان - سراسری - تجربی - ۹۰

۵۱- در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

دبیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۰

۵۲- مجموعه ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه ی جدید با مجموعه ی B، کدام است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۴۱ (۳) ۴۲ (۴) ۴۵

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۳- در یک دنباله ی هندسی ۶ جمله ای، مجموع دو جمله ی اول ۸۱ و مجموع دو جمله آخر ۱۶ می باشد. مجموع این ۶ جمله، کدام است؟

(۱) ۱۳۳ (۲) ۱۳۸ (۳) ۱۲۴ (۴) ۱۱۵

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۴- اجتماع دو مجموعه ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ی جدید، کدام است؟

(۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۵- در یک دنباله ی هندسی، جمله ی چهارم ۸ برابر جمله ی اول است. اگر جمله ی ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول آن، کدام است؟

(۱) ۴۷/۲۵ (۲) ۴۷/۵ (۳) ۴۷/۷۵ (۴) ۴۸/۵

دبیرستان - سراسری - انسانی - ۹۴

۵۶- به ازای یک مقدار x، اعداد x ، $x-8$ ، x و $x+12$ ، به ترتیب سه جمله ی اول دنباله ی هندسی نزولی اند. حد مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

دبیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۳

۵۷- تعداد جملات یک دنباله هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

$$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad 2 (3) \quad 3 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵۸- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم، که تعداد جملات در هر دسته، برابر شماره ی آن دسته باشد. ... (۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), ... مجموع دو جمله ی اول و آخر دسته ی سی ام، کدام است؟

$$1700 (1) \quad 1750 (2) \quad 1800 (3) \quad 1850 (4)$$

دیپیرستان - سراسری - تجربی - ۹۴

۵۹- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم، که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره ی آن دسته باشد، ... (۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), (۷, ۸, ۹, ۱۰), ... مجموع جملات در دسته ی بیستم، کدام است؟

$$4010 (1) \quad 4020 (2) \quad 4030 (3) \quad 4040 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۴

۶۰- در دو دنباله ی حسابی به صورت های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$58 (1) \quad 59 (2) \quad 60 (3) \quad 61 (4)$$

دیپیرستان - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۹۴

۵.۱ کلید تست‌های فصل اول

۴	۳	۲	۱	- ۳۷	۴	۳	۲	۱	- ۱
☐	☒	☐	☐		☒	☐	☐	☐	- ۲
☐	☐	☒	☐	- ۳۸	☒	☐	☐	☐	- ۳
☐	☒	☐	☐	- ۳۹	☐	☒	☐	☐	- ۴
☒	☐	☐	☐	- ۴۰	☐	☒	☐	☐	- ۵
☐	☐	☐	☒	- ۴۱	☒	☐	☐	☐	- ۶
☐	☐	☒	☐	- ۴۲	☐	☒	☐	☐	- ۷
☐	☐	☒	☐	- ۴۳	☒	☐	☐	☐	- ۸
☒	☐	☐	☐	- ۴۴	☒	☐	☐	☐	- ۹
☐	☐	☒	☐	- ۴۵	☐	☐	☒	☐	- ۱۰
☒	☐	☐	☐	- ۴۶	☐	☒	☐	☐	- ۱۱
☐	☒	☐	☐	- ۴۷	☐	☐	☐	☒	- ۱۲
☐	☒	☐	☐	- ۴۸	☐	☐	☐	☒	- ۱۳
☒	☐	☐	☐	- ۴۹	☒	☐	☐	☐	- ۱۴
☐	☐	☒	☐	- ۵۰	☒	☐	☐	☐	- ۱۵
☐	☐	☒	☐	- ۵۱	☐	☒	☐	☐	- ۱۶
☐	☒	☐	☐	- ۵۲	☐	☐	☒	☐	- ۱۷
☐	☐	☐	☒	- ۵۳	☒	☐	☐	☐	- ۱۸
☒	☐	☐	☐	- ۵۴	☐	☐	☐	☒	- ۱۹
☐	☐	☐	☒	- ۵۵	☒	☐	☐	☐	- ۲۰
☒	☐	☐	☐	- ۵۶	☒	☐	☐	☐	- ۲۱
☐	☒	☐	☐	- ۵۷	☐	☒	☐	☐	- ۲۲
☐	☒	☐	☐	- ۵۸	☐	☐	☒	☐	- ۲۳
☐	☐	☐	☒	- ۵۹	☐	☐	☐	☒	- ۲۴
☐	☒	☐	☐	- ۶۰	☐	☒	☐	☐	- ۲۵
					☐	☐	☒	☐	- ۲۶
					☐	☐	☒	☐	- ۲۷
					☐	☒	☐	☐	- ۲۸
					☒	☐	☐	☐	- ۲۹
					☐	☒	☐	☐	- ۳۰
					☒	☐	☐	☐	- ۳۱
					☐	☐	☐	☒	- ۳۲
					☐	☐	☐	☒	- ۳۳
					☐	☒	☐	☐	- ۳۴
					☐	☒	☐	☐	- ۳۵
					☐	☒	☐	☐	- ۳۶

فصل دوم مثلثات

✓ نسبت های مثلثاتی

✓ دایره مثلثاتی

✓ روابط بین نسبت های مثلثاتی

علی نژاد

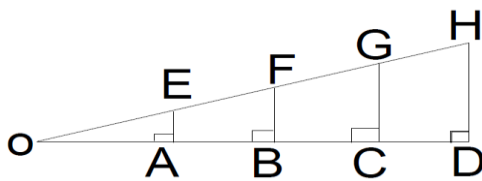
شما می ت

نسبت های مثلثاتی

❖ آشنایی با نسبت های مثلثاتی

- سینوس
- کسینوس
- تانژانت
- کتانژانت

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد



به شکل مقابل نگاه کن! بگو خب که چی! یه خط کش بردار و با من بیا

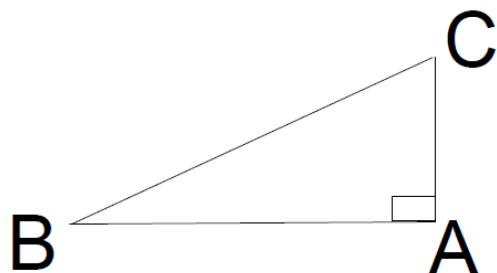
زاویه دلخواه O را در نظر بگیر، روی یه ضلع اون نقطه دلخواهی مثل A را در نظر بگیر و از اون خطی عمود خارج کن تا ضلع دیگر را در E قطع کند. به همین ترتیب نقاط دلخواه دیگه ای مثل B, C, D انتخاب کن و همون کارهای قبلی را انجام بده. حالا اندازه پاره های روی شکل را به دست بیار خب میدونم به دست نمیاری من به جات به دست آوردم. حالا به تساوی های زیر دقت کن. همانطور که میبینی این تساوی ها ربطی به جای قرار گرفتن A, B, C, D ندارد پس هر کدام شایسته نامی برای خود هستن.

$$\begin{aligned} 1. \frac{AE}{OE} &= \frac{BF}{OF} = \frac{CG}{OG} = \dots \\ 2. \frac{OA}{OE} &= \frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OG} = \dots \\ 3. \frac{AE}{OA} &= \frac{BF}{OB} = \frac{CG}{OC} = \dots \\ 4. \frac{OA}{AE} &= \frac{OB}{BF} = \frac{OC}{CG} = \dots \end{aligned}$$

خب حالا به هر کدام از این نسبت ها یه اسم اختصاص میدیم. در هر تساوی مقدار کسر ها با هم برابرند ولی خب مقدار این کسر ها به اندازه زاویه O بستگی داره. خب حالا به کسر های اول اسم سینوس را میدیم و به صورت $\sin O$ نشون میدیم. کسر های دوم را با اسم کسینوس نام گذاری می کنیم و به صورت $\cos O$ نشون میدیم. کسر های سوم را با اسم تانژانت نام گذاری می کنیم و به صورت $\tan O$ نشون میدیم. در پایان کسر های چهارم را با کتانژانت نام گذاری می کنیم و به صورت $\cot O$ نشون میدیم.

حالا برای اینکه یه کم مطلب را جمع و جور کنیم، یکی از اون مثلث های قائم الزاویه را در نظر میگیریم و مطالب را به صورت زیر خلاصه می کنیم. در اینجا زاویه B به جای زاویه O در شکل بالاست.

$$1. \sin B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$



پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

$$2. \cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$3. \tan B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

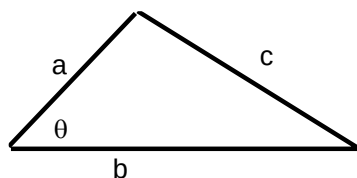
$$4. \cot B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

❖ جدول زیر را یاد بگیر

	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

❖ به رابطه خوب برای تعیین مساحت یه مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آنها :

$$\star S = \frac{ab \sin \theta}{2}$$



❖ در هر مثلث داریم :

$$\bullet \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نمونه

۱. یک مربع رسم کرده و با رسم یک قطر آن اندازه نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵ را بیابید.

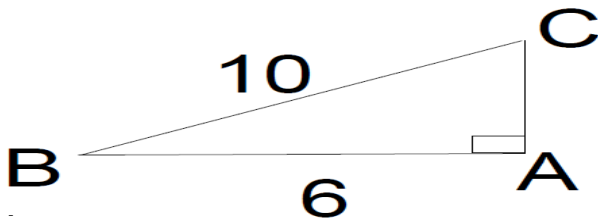
شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید

۲. مقدار عددی عبارت های زیر را بیابید .

a) $\sin^2 60 + \cos^2 60 = ?$

b) $1 + \sin 30 + \cos^2 45 + 4 \sin 30 \cos 60 = ?$

۳. در شکل مقابل نسبت های مثلثاتی زاویه B را بیابید .

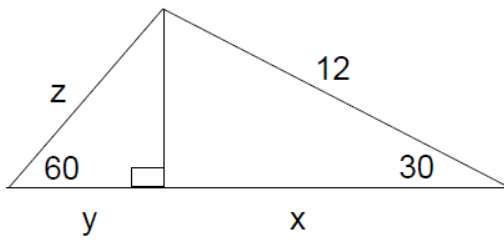


۴. طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۱۰ سانتی متر و سینوس یکی از زاویه های $\frac{3}{5}$ است . محیط مثلث را بیابید .

۵. نردبانی به طول 8m به دیواری تکیه داده شده و زاویه آن با سطح زمین ۶۰ درجه است . نوک نردبان تا زمین چقدر است ؟

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۶. در شکل مقابل x, y, z را بیابید.



۷. در مثلث قائم الزاویه ABC که AB وتر مثلث است، اگر $\angle A = 30^\circ$ و $AB = 4$ باشد مساحت این مثلث را بیابید.

۸. در مثلث ABC زاویه $A = 90^\circ$ و $BC = 3\sqrt{2}$ و $\tan B = \sqrt{2}$ اندازه ضلع BC را بیابید.

شما می توانید با عضویت در کانال، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

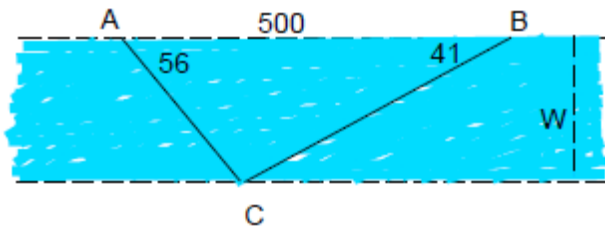
۹. سکوی پرتاب موشکی در ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین قرار دارد. موشک تحت زاویه ۶۰ درجه پرتاب میشود و به حرکت خود با همین زاویه ادامه می دهد. اگر سایه موشک روی زمین ۱۰۰۰ متر طی کرده باشد، موشک در چه ارتفاعی است و چه مقدار در خط مسیر خود طی کرده است؟

۱۰. شخصی روبروی یک پرچم ایستاده است و به بالاترین نقطه پرچم نگاه می کند زاویه دید چشمی این شخصی برابر ۳۲ درجه است. ارتفاع چشم شخص از سطح زمین برابر ۱/۸ متر است و فاصله فرد تا میله پرچم برابر ۴۵ است. طول میله پرچم را بیابید.

۱۱. یک مهندس نقشه برداری برای اندازه گیری ارتفاع قله دماوند در نقطه ای از دامنه کوه ایستاده که فاصله آن تا نوک قله برابر ۹۲۱۸ متر می باشد و با دوربین خود نوک قله را با زاویه ۳۰ درجه می بیند. اگر دامنه کوه در ارتفاع ۱۰۰۰ متری سطح دریا واقع باشد این نقشه بردار اندازه ارتفاع قله دماوند را از سطح دریا چه عددی گزارش می کند؟

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۱۲. در شکل زیر با توجه به مقادیر داده شده عرض رودخانه را بیابید.



دایره مثلثاتی

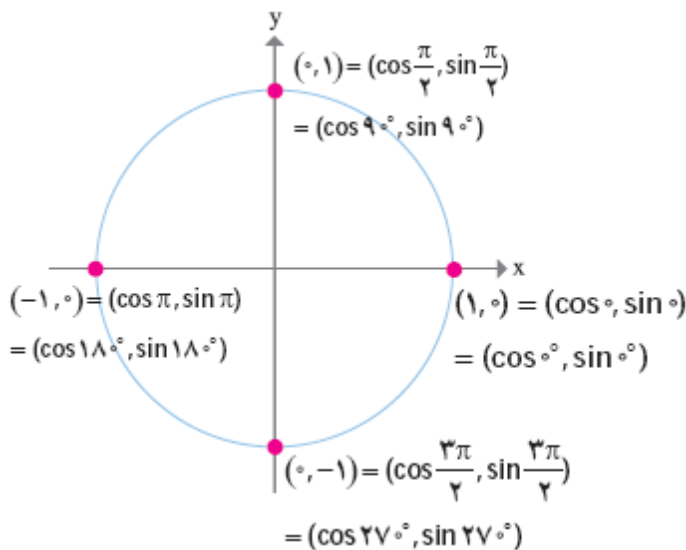
❖ تو این درس چه خبره :

- آشنایی با دایره مثلثاتی
- تعیین نسبت های مثلثاتی زوایای ۰° و ۹۰° و ۱۸۰° و ۲۷۰° و ۳۶۰°
- رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه برخورد

شما می توانید با عضویت در کانال، اسوالات ریاضی خود را پرسشیده و در بهترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

❖ دایره مثلثاتی

❖ دایره ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف جهت عقربه های ساعت است.



در نمودار زیر محور افقی محور کسینوس ها و محور عمودی

محور عمودی محور سینوس ها خواهد بود

همچنین خواهیم داشت: $\sin \theta = y_B$, $\cos \theta = x_B$.

علامت $\sin \theta$ و $\cos \theta$ در هر ناحیه به ترتیب از

علامت x, y به دست می آید.

در شکل مقابل اندازه نسبت های مثلثاتی مضارب ۹۰

درجه را می بینید.

❖ رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

- اگر زاویه برخورد خط باجهت مثبت محور x را برابر θ بگیریم و شیب خط را برابر m بگیریم در این صورت $m = \tan \theta$

تمرین

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت

۱۳. جدول مقابل را برای علامت نسبت های مثلثاتی کامل کنید.

مقدار θ	ربع	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\tan \theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	اول			
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	دوم			
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	سوم			
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	چهارم			

۱۴. برای هر یک از حالات زیر یک مثال بیاورید .

الف) زاویه ای که کسینوس آن مثبت و تانژانت آن منفی باشد .

ب) زاویه ای که سینوس آن منفی و کتانژانت آن مثبت باشد .

۱۵. اگر $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ و ربع چهارم مثلثاتی باشد سایر نسبت های مثلثاتی را بیابید .

شما می توانید با عضویت در کانال ، سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۱۶. اگر $\sin \theta = \frac{2}{7}$ باشد و θ در ربع دوم باشد سایر نسبت های مثلثاتی را بیابید .

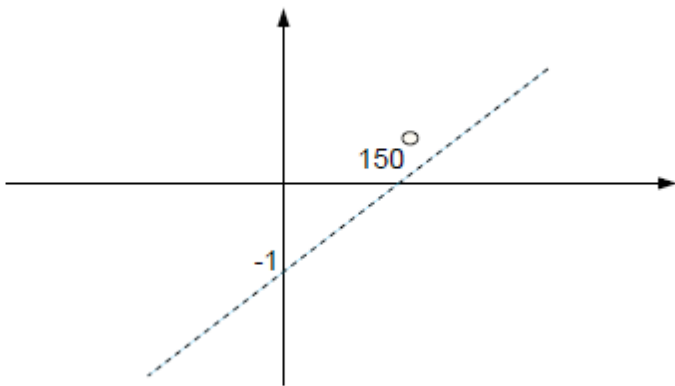
۱۷. معادله خطی را بنویسید که از نقطه A به طول ۲ واقع بر محور افقی گذشته و با محور افقی زاویه 30° درجه بنویسید .

۱۸. معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور x 45° درجه بوده و از نقطه $(0,2)$ بگذرد .

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۱۹. مقدار m را طوری بیابید که خط $(m+2)x + (-2m+1)y = 2$ با محور x زاویه ۴۵ درجه بسازد.

۲۰. با توجه به شکل معادله خط را بنویسید.



۲۱. اگر θ یک زاویه حاده و $\tan \theta = \frac{1}{2}$ باشد مقادیر $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را بیابید.

۲۲. اگر $\tan x = -\frac{1}{2}$ و $\cos x < 0$ مقدار $\sin x$ را بیابید.

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

روابط بین نسبت های مثلثاتی

❖ چی یاد میگیری توی این درس :

- آشنایی با روابط بین نسبت های مثلثاتی
- آشنایی با تعدادی از کار برد های انها

دانلود از اپلیکیشن پادرس



❖ روابط بین نسبت های مثلثاتی

- ★ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- ★ $\cos \theta \times \tan \theta = \sin \theta$
- ★ $\sin \theta \times \cot \theta = \cos \theta$
- ★ $\tan \theta \times \cot \theta = 1$
- ★ $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$
- ★ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

۲۳. اگر انتهای کمان α در ربع چهارم باشد و داشته باشیم $\tan \alpha = -\frac{5}{3}$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه را بیابید .

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۲۴. اگر انتهای کمان α در ربع دوم باشد و داشته باشیم $\sin \alpha = \frac{3}{7}$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی زاویه را بیابید .

۲۵. ثابت کنید همواره رابطه $(1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 1$ برقرار است .

۲۶. فرض کنید $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ باشد در این صورت مقدار عبارت $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x - \cos x}$ را بیابید .

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

۲۷. اگر $1 - \cos\theta = \frac{3}{5}$ باشد و داشته باشیم $\tan\theta \times \cos\theta > 0$ باشد معین کنید انتهای کمان θ در کدام ناحیه است؟

۲۸. درستی رابطه های زیر را ثابت کنید .

$$a) \frac{1+\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$b) 1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$$

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

$$c) \frac{1}{\cos x} + \cot x = \frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$$

۲۹. اگر $\cot x = \frac{3}{4}$ باشد حاصل $\frac{4}{\sin x} - \frac{3}{\cos x}$ را بیابید.

۳۰. فرض کنید $\alpha \geq 60^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$ باشد حدود تغییرات m را بیابید.

۳۱. کمترین و بیشترین مقدار $\frac{10}{4+3 \sin x}$ را بیابید.

شما می توانید با عضویت در کانال ،سوالات ریاضی خود را پرسیده و در کمترین زمان ممکن جواب خود را دریافت کنید. علی لطفی نژاد

فصل ۳

توان های گویا و عبارات جبری

۱.۳ ریشه و توان اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه های دوم و سوم عددها آشنا شده اید. ریشه و توان رابطه دو سویه ای با هم دارند.

$$(-3) \xrightleftharpoons[\text{ریشه سوم}]{\text{توان سه}} -27 \quad \text{یا} \quad (-3)^3 = -27 \longleftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مثال ۱.۳. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

$$2^4 = 16 \longleftrightarrow$$

$$11^2 = 121 \longleftrightarrow$$

$$(0.25)^2 = 0.0625 \longleftrightarrow$$

$$(0.5)^2 = 0.25 \longleftrightarrow$$

$$(-9)^2 = 81 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{81} = 9 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{27} = 3 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{100} = 10 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{10000} = 100 \longleftrightarrow$$

مثال ۲.۳. حجم یک مکعب برابر 50 cm^3 است. ضلع مکعب با دقت یک رقم اعشار چقدر است؟

در حالت کلی توان و ریشه رابطه‌ی عکس با هم دارند. مطالب مطرح شده در بالا را بصورت دقیق تر در تعریف زیر آورده ایم.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد. در این صورت عدد حقیقی b را یک ریشه n ام عدد حقیقی a گوئیم هرگاه $b^n = a$ باشد.

مثلاً -3 ریشه پنجم -243 است چرا که $(-3)^5 = -243$. همچنین دو عدد 2 و -2 ریشه چهارم 16 می باشند چرا که $(\pm 2)^4 = 16$ است. اگر n زوج باشد عدد حقیقی و مثبت a دارای دو ریشه n ام می باشد که قرینه یکدیگرند. در این حالت ریشه n ام مثبت را ریشه n ام اصلی می نامیم و با نماد $\sqrt[n]{a}$ نشان می دهیم. پس حاصل عبارت $\sqrt[4]{81}$ فقط برابر 3 است و هیچگاه از عبارت نادرست $\sqrt[4]{81} = -3$ استفاده نمی کنیم. اعداد منفی دارای ریشه n ام زوج نیستند ولی ریشه n ام فرد دارند. مثلاً $\sqrt[5]{-32}$ وجود ندارد اما $\sqrt[5]{-32} = -2$ است.

مثال ۳.۳. کامل کنید.

$$۱) \sqrt[3]{64} =$$

$$۲) \sqrt[6]{64} =$$

$$۳) \sqrt[5]{1024} =$$

$$۴) \sqrt[4]{0.0625} =$$

$$۵) \sqrt{\frac{121}{100}} =$$

$$۶) \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} =$$

$$۷) \sqrt{\frac{36}{25}}$$

$$۸) \sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$$

$$۹) \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^2}$$

$$۱۰) \sqrt{8\sqrt{4}\sqrt[3]{64}}$$

مهمترین خواص رادیکال ها در زیر فهرست کرده ایم.

$$۱) \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{n فرد} \\ |a| & \text{n زوج} \end{cases}$$

$$۲) \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{واضح است که باید } a, b \text{ مثبت باشند.}$$

$$۳) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$۴) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۵) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a \geq 0$$

$$۶) a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b} & \text{n فرد } n > 1 \\ \sqrt[n]{a^n b} & \text{n زوج } a \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt[n]{a^n b} & \text{n زوج } a \leq 0, b \geq 0 \end{cases}$$

$$۷) \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

یادداشت تاریخی: رسم عدد $\sqrt[3]{2}$ روی محور یا کلا رسم پاره خطی با طول $\sqrt[3]{2}$ یکی از قدیمی ترین مسائل در تاریخ ریاضیات است. این مسئله به تضعیف مکعب معروف است. داستانی نقل می کنند که یکی از فراعنه مصر که مقبره ای برای فرزندش می ساخته (مقبره به شکل مکعب مستطیل بوده است. البته مدفن اصلی مقبره) به مهندسان دستور داده که مقبره کوچک است و آن را دو برابر کنید. مهندسان به اشتباه اضلاع مکعب را دو برابر کرده اند و مقبره بسیار بزرگتر از انتظار پادشاه بود. در واقع مکعب مستطیلی که حجم آن دو برابر دیگری باشد نیاز به ترسیم و استفاده از عدد $\sqrt[3]{2}$ دارد. اما به کمک خط کش و پرگار ساده این کار امکان پذیر نیست. در این زمینه می توانید مسئله تضعیف مکعب را در گوگل جستجو کنید. حال ممکن است این سوال به ذهنتان خطور کند که از کجا بدانیم چه اعدادی را می شود با خط کش و پرگار ترسیم کرد. پاسخ دقیق به این پرسش در حال حاضر با اطلاعات شما غیرممکن است اما بطور خلاصه می توان گفت تمام اعداد گویا ترسیم پذیرند. عددی حقیقی چون π ترسیم پذیر با خط کش و پرگار است هرگاه بتوان با تعداد متناهی عملیات جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم و یا ریشه دوم گرفتن از اعداد صحیح حاصل شود. پس با این حساب چون 2 و 3 ترسیم پذیرند پس عدد $2 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ نیز ترسیم پذیر است.

تذکر مهم: آیا بدون استفاده از ماشین حساب می توان مقدار تقریبی (اما با دقت بالا) رادیکال ها را بدست آورد؟ پاسخ مثبت است. دستور زیر در این ارتباط بسیار مفید است:

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \pm b} \approx a \pm \frac{b}{na^{n-1}}$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \times 4^2} = 4 + 0.02 = 4.02$$

$$\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{2^5 - 2} \approx 2 - \frac{2}{5 \times 2^4} = 2 - 0.02 = 1.98$$

مثال ۴.۳. درست و نادرست را مشخص کنید.

۱ - هر عدد حقیقی دو ریشه پنجم دارد که قرینه یکدیگرند.

۲ - ریشه های چهارم عدد ۱۶ دو عدد $\pm \sqrt[4]{16}$ می باشند

۳ - هر عدد همواره ریشه n ام دارد.

۴ - هر عدد فرد همواره دارای ریشه هفتم است.

مثال ۵.۳. آیا رابطه $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ درست است؟ چرا؟

مثال ۶.۳. آیا رابطه $(\sqrt[n]{a})^n = a$ همیشه درست است؟ چرا؟

مثال ۷.۳. اگر $x = \sqrt[n]{a}$ باشد و فرجه n را افزایش دهیم برای مقدار x چه اتفاقی می افتد؟ بزرگتر می شود یا کوچکتر می شود؟

مثال ۸.۳. از دو عدد $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[4]{3}$ کدام بزرگتر است؟

مثال ۹.۳. عدد $\sqrt[3]{321}$ مابین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

مثال ۱۰.۳. کامل کنید.

۱) $\sqrt[3]{125} =$

۲) $\sqrt[5]{-32} =$

۳) $\sqrt[7]{128} =$

۴) $\sqrt[4]{256} =$

۵) $\sqrt[9]{-1} =$

۶) $\sqrt[6]{625} =$

۷) $-\sqrt[4]{16} =$

۸) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$

۹) $\sqrt[3]{-0.001} =$

۱۰) $\sqrt[6]{0} =$

۱۱) $\sqrt[4]{(-3)^4} =$

۱۲) $\sqrt[6]{(-2)^6} =$

۱۳) $\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} =$

۱۴) $a^2 \bigcirc a^3 \quad 0 < a < 1$

۱۵) $\sqrt{a} \bigcirc \sqrt[3]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۶) $\sqrt[3]{a} \bigcirc \sqrt[5]{a} \quad 0 < a < 1$

۱۷) $(\sqrt[4]{16})^4 =$

۱۸) $(\sqrt[3]{-8})^2 =$

۱۹) $\sqrt{150} =$

۲۰) $\sqrt{486} =$

۲۱) $\sqrt[3]{1080} =$

۲۲) $\sqrt[5]{800} =$

۲۳) $\sqrt[2]{\frac{3}{4}} \times \sqrt[2]{\frac{9}{16}} =$

۲۴) $\sqrt[2]{128 \times 314}$

مثال ۱۱.۳. حاصل عبارات زیر را تا سرحد امکان ساده کنید.

$$۱) \sqrt[۴]{\frac{(a+b)^۴}{(a-b)^۴}} =$$

$$۲) \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} =$$

$$۳) \frac{\sqrt{x^۳y^۳}}{\sqrt{xy}}$$

$$۴) ۲\sqrt{۲۷} \times ۳\sqrt{۱۲} =$$

$$۵) \sqrt[۳]{a^۲} \times \sqrt[۴]{a^۳} =$$

$$۶) \sqrt[۵]{a^۳} \times \sqrt[۶]{a^۵} \times \sqrt[۳]{a^۲} =$$

$$۷) \sqrt[۳]{۴ - ۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۶]{۶ + ۴\sqrt{۲}} =$$

$$۸) \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}\sqrt[۳]{۲}} =$$

$$۹) \sqrt[۴]{۶ + ۴\sqrt{۲}} \times \sqrt{۲ - \sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{(c-۱)^۲} - \sqrt{(۱+c)^۲} = \quad , c \in [-۱, ۱]$$

$$۱۱) (۲\sqrt{۲} - \sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸} - \sqrt{۲۰} + ۲\sqrt{۲})$$

تمرین ۱.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \sqrt[۵]{-۳۲(x-y)^{۱۰}} =$$

$$۲) \sqrt[۳]{-(x-y)^۶} =$$

$$۳) \sqrt[۳]{۲۷c^۷} =$$

$$۴) \sqrt[۳]{۲۴} \times \sqrt[۳]{۲} =$$

$$۵) \mp \sqrt{۶/۲۵} =$$

$$۶) \sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱} =$$

$$۷) \sqrt{۲\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \times \sqrt[۴]{۱۱+۴\sqrt{۶}} =$$

$$۸) \sqrt{۳۱} \times \sqrt{۶-\sqrt{۵}} \times \sqrt{۳+\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} \times \sqrt{۳-\sqrt{۳-\sqrt{۵}}} =$$

$$۹) \sqrt{۱۱-۲\sqrt{۲}} =$$

$$۱۰) \sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}} =$$

$$۱۱) \sqrt{۲+\sqrt{۳}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} \times \sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}} \times$$

$$\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}} =$$

$$۱۲) \sqrt[۴]{\frac{-۲۴۳}{x^۲-\sqrt{x^۴+۶x^۲+۹}}} =$$

$$۱۳) x\sqrt{-x} \times \sqrt[۳]{x} =$$

۲.۳ توان های گویا

از کلاس نهم برخی مطالب را در مورد توان می دانید. با اینحال جهت مرور، مطالب زیر را آورده ایم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد و $a \in \mathbb{R}$ عددی دلخواه. عدد a^n را بصورت :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_n$$

تعریف می کنیم. برای اعداد صحیح منفی نیز این تعریف قابل تعمیم است. a^{-n} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

در نهایت $a^0 = 1$ تعریف می شود و حال a^n را برای تمام اعداد صحیح تعریف کرده ایم. مهمترین خواص توان عبارتند از :

$$a^n \times a^m = a^{m+n} \quad \text{۱- همواره}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{۲- همواره}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{۳- همواره}$$

پرسش: آیا دو مقدار a^{m^n} و $(a^m)^n$ مساوی اند؟ چرا؟

حال می خواهیم توان را به اعداد گویا تعمیم دهیم.

گازی با فشار وارد یک مخزن می شود. در هر دقیقه فشار گاز دو برابر می شود تا به فشار معینی برسد.

دقیقه	۱	۲	۳	...	n
فشار	۲	2^2	2^3	...	2^n

حال پرسش این است که در 3^0 ثانیه پس از دقیقه دوم فشار گاز چقدر خواهد بود؟ واضح است که جواب عددی چون a است که $2^2 < a < 2^3$. چون زمان دقیق را داریم پس می توان ادعا کرد که $a = 2^{\frac{5}{2}}$ که البته درست است اما چه معنایی می دهد؟ اگر تصور کنیم مقدار فشار در هر 3^0 ثانیه x برابر می شود پس باید بعد از ۱ دقیقه $x \times x = x^2$ برابر شود اما بعد از یک دقیقه دو برابر فشار داریم یعنی $x^2 = 2$ و لذا $x = \sqrt{2}$. حال کل زمان دو نیم دقیقه شامل ۵ زمان 3^0 ثانیه است پس فشار می شود x^5 یعنی $a = x^5 = \sqrt[5]{2^5}$. بعبارت بهتر باید داشته باشیم

$$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt[5]{2^5}$$

حال می توان در حالت کلی توان گویای یک عدد حقیقی را تعریف کرد.

تعریف ۳.۳. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. اگر $m, n \in \mathbb{N}$ باشند تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال ۱۲.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $(-8)^{\frac{1}{3}} =$

۲) $8^{\frac{2}{3}} =$

۳) $(32)^{-\frac{2}{5}} =$

۴) $(-8)^{\frac{1}{6}} =$

۵) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[6]{z^4}}} =$

۶) $(0.25)^{\frac{3}{4}} =$

۷) $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{\sqrt{8}}} + (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^3 - 2^{0.3} - 8^{0.1} =$

تمرین ۲.۳. درستی روابط حاکم بر اعداد تواندار که قبلا در مورد توان های صحیح گفته شده را در مورد توان های گویا تحقیق کنید. بعنوان نمونه

$$\begin{aligned} a^r \times a^s &= a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[q]{a^p} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{pn}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} \\ &= a^{\frac{pm+qn}{nq}} \\ &= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} \\ &= a^{r+s} \end{aligned}$$

مثال ۱۳.۳. آیا تساوی $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$ درست است؟ در مورد جواب بحث کنید.

مثال ۱۴.۳. هرگاه $a > 1$ باشد ثابت کنید $a^{n-1} < a^n$. در حالتی که $0 < a < 1$ باشد چه حکمی می توان کرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

مثال ۱۵.۳. آیا محاسبه زیر درست است؟

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = \left[(-3)^{\frac{1}{4}} \right]^4 = (-3)^{\frac{1}{4} \times 4} = (-3)^1 = -3$$

مثال ۱۶.۳. نیلوفر و کیوان هر کدام عبارت $\sqrt[3]{a^2}$ را ساده کرده اند. جوابهای آنها بصورت زیر است. جواب کدام دقیق تر است؟ چرا؟

$$\text{راه حل کیوان} \rightarrow \sqrt[3]{a^2} = {}^{3 \times 2}\sqrt{a^2} = \sqrt[6]{a^2}$$

$$\text{راه حل نیلوفر} \rightarrow \sqrt[3]{a^2} = \begin{cases} \sqrt[3]{a} & a > 0 \\ \sqrt[3]{-a} & a < 0 \end{cases}$$

مثال ۱۷.۳. از رابطه $\left(\frac{1}{p}\right)^{2\alpha-3} = 4 \times 16^\alpha$ مقدار α را بیابید.

تمرین ۳.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$۲) \left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)^2 \times \sqrt{\frac{1}{xy}} \times \left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{-1}$$

$$۳) \left(a^{\frac{5}{6}}\right)^{\circ 7} \div \left(d^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$۴) \left(a^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{4}{5}}$$

$$۵) \left(\sqrt[3]{32}\sqrt[4]{16}\sqrt[5]{128} \div \sqrt[4]{1024}\sqrt[5]{256}\sqrt[3]{64}\right)^{-\frac{2}{53}}$$

$$۶) 0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0.75}$$

$$۷) \frac{\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{\frac{y}{x}}\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$$

$$۸) \left(\frac{1}{3}\right)^{p+2} \cdot \sqrt{\frac{1}{27}} \geq 9 \rightarrow p = ?$$

۳.۳ عبارت های جبری

در این بخش به معرفی چند اتحاد جبری دیگر و استفاده از آنها در تجزیه عبارت های جبری می پردازیم. از کلاس نهم با اتحاد ها آشنا شده اید. یک تساوی که به ازای تمامی مقادیر متغیر موجود در آن تساوی درست باشد را یک اتحاد گوییم. به دو تساوی زیر دقت کنید.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (۱.۳)$$

$$x^2 - 5 = 4 \quad (۲.۳)$$

تساوی (۱.۳) به ازای تمامی مقادیر x, y درست است و لذا به آن اتحاد گوییم. در حالیکه تساوی (۲.۳) به ازای دو مقدار $x = 3, x = -3$ درست است و لذا به آن معادله گوییم. از کلاس نهم با برخی اتحادها آشنا شده اید. در اینجا آن اتحادها را بازنویسی می کنیم.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

حال آماده هستیم تا چند اتحاد جدید معرفی کنیم. اولین اتحاد، اتحاد مربع سه جمله ای است. یعنی هدف یافتن حاصل $(x + y)^3$ است. به کمک اتحادهای بالا عبارت فوق را تا سرحد امکان ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= (x + y)^2 \times (x + y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2) \times (x + y) \\ &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + y^2x + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه حاصل بصورت زیر بدست می آید:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

اگر در رابطه فوق $(-b)$ تبدیل شود اتحاد زیر حاصل می شود:

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

در نهایت اگر از xy در جملات دوم و سوم فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ x^3 - y^3 &= (x - y)^3 + 3xy(x - y) \end{aligned}$$

مثال ۱۸.۳. به کمک آخرین رابطه عبارت های $x^3 + y^3$ و $x^3 - y^3$ را تجزیه کنید.

نتیجه مثال بالا به قدری اهمیت دارد که به آنها اسم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات بدهیم:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

مثال ۱۹.۳. حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$۱) (2x - y^2)^2 =$$

$$۲) \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{3}\right)^2 =$$

$$۳) (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4) =$$

$$۴) (2x - 1)^3 =$$

$$۵) (1 + x^2 + x^4)(1 - x^2) =$$

$$۶) (101)^3 =$$

$$۷) \left(x - \frac{1}{x}\right)(8x^2 + 2)(2x + 1) =$$

$$۸) (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 8y^3 =$$

$$۹) \frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}$$

$$۱۰) (x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)$$

$$۱۱) (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3) \quad ۱۲) (a - b - c)^2 - (a - b + c)^2$$

مثال ۲۰.۳. فرض کنید $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ باشد. حاصل عددی عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $x^2 + \frac{1}{x^2} =$

۲) $x^3 + \frac{1}{x^3} =$

۳) $x^2 - \frac{1}{x^2} =$

۴) $x^3 - \frac{1}{x^3} =$

۵) $x^4 + \frac{1}{x^4} =$

مثال ۲۱.۳. به کمک اتحادها عبارات زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^6 - y^6 =$

۲) $x^3 - ۱۲۵$

۳) $۲۷x^3 + ۱$

۴) $۴a^2 - b^2 - ۲b + ۴a =$

۵) $۹x^2 - ۳x - ۲ =$

۶) $x^3 - x^2 - x + ۱ =$

۷) $a^4 - ۲a^2 + ۴۹ =$

۸) $x^2y^2 - x^2y^3 - ۱ + y =$

۹) $۶۴x^3 - ۴۸x^2 + ۱۲x - ۱ =$

۱۰) $۴a^4 - ۶۴ =$

۱۱) $(x + ۱)^3 + ۸ =$

۱۲) $x^5 + x + ۱ =$ (hint : $x^2 - x^2$)

۱۳) $۴x^4 + ۱$

۱۴) $۸x^3 - ۱۲x^2 + ۶x - ۱ =$

تمرین ۴.۳. به کمک اتحادها حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱) (x - ۲y^۲)^۲ - (x + ۲y^۲)^۲ & ۲) \left(\frac{۳}{۴}xy - \frac{۱}{۴}y\right)^۲ \\
 ۳) (۲m - n)(۴m^۲ + ۲mn + n^۲) & ۴) (x + ۲y)(x^۲ - ۲xy + ۴y^۲) \\
 ۵) (۲ + x)(۴ - ۲x + x^۲)(۸ - x^۳) & ۶) (x - y)^۳ - (x + y)^۳ \\
 ۷) (۲x - y)(۴x^۲ + y^۲)(۲x + y) + y^۴ & ۸) (a - b + c)(a - b - c)
 \end{array}$$

تمرین ۵.۳. تجزیه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱) ab - a^۲b^۲ & ۲) a + b + a^۲ - b^۲ \\
 ۳) a^۲ - b^۲ + a^۳ - b^۳ & ۴) x^۶ - (yz)^۶ \\
 ۵) ۳۶a^۴b - ۱۶b^۵ & ۶) a^۲c^۲ + b^۲d^۲ - b^۲c^۲ - a^۲d^۲ - ۴abcd \\
 ۷) c^۶ + p^۶ & ۸) x^۳ + ۶۴m^۳ \\
 ۹) (a + b)^۳ - (a - b)^۳ - ۲b & ۱۰) (a + b)^۳ + (a - b)^۳ - ۳a
 \end{array}$$

کاربرد تجزیه در یافتن ب م م و ک م م چندجمله‌ایها

یک چندجمله‌ای مثل $a + b$ را در نظر بگیرید. اگر این دو جمله‌ای را در اعداد صحیح یا هر چندجمله‌ای دیگری ضرب کنیم، حاصل را مضربی از $a + b$ گوئیم. پس عبارات زیر همگی مضارب $a + b$ هستند.

$$۲(a + b), (a^۲ - b^۲), (a^۳ - b^۳), \dots$$

همچنین عبارت $a + b$ مقسوم علیه مشترک هر سه عبارت فوق است. بطور کلی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت جبری ابتدا آنها را تجزیه کرده و سپس برای ب م م عوامل مشترک با کمترین توان در تجزیه را منظور می‌کنیم و برای ک م م هم عوامل مشترک را با بزرگترین توان در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف یافتن ب م م و ک م م دو عبارت جبری $a^۲ - b^۲$ ، $a^۳ - b^۳$ است. با تجزیه کردن آنها داریم:

$$\begin{cases} a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b) \\ a^۳ - b^۳ = (a - b)(a^۲ + ab + b^۲) \end{cases}$$

پس با این حساب ب م م برابر $a - b$ است و ک م م برابر $(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a - b)$. یکی از فواید محاسبه ک م م در مخرج مشترک گرفتن برای جمع و تفریق عبارات گویاست. در قسمت بعد عبارات گویا را بررسی می‌کنیم.

عبارات گویا

تعریف ۴.۳. منظور از یک عبارت گویا عبارتی است که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند. اگر $p(x)$ ، $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند عبارت

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

را یک عبارت گویا گوئیم. شرط تعریف چنین عبارتی آنست که $q(x) \neq 0$ باشد.

مثال ۲.۲.۳. معین کنید هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از متغیرش تعریف شده است؟ (دامنه‌ی تعریف آن را بیابید)

$$۱) f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۳}$$

$$۲) g(x) = \frac{۳y}{y^2 - ۴}$$

$$۳) h(x) = \frac{x^2 + ۱}{x^4 + ۱}$$

$$۴) k(x) = \frac{z}{2z^2 - 7z + 5}$$

$$۵) \ell(x) = \frac{x}{x}$$

$$۶) u(x) = \frac{۳}{2x^2 + 2x} + \frac{2x - ۱}{x^2 - ۱} - \frac{۲}{x}$$

مثال ۲۳.۳. عملیات‌های خواسته شده بر عبارات گویا را انجام دهید. اگر تنها یک کسر در صورت مسئله است هدف ساده کردن آن است.

$$۱) \frac{6x^2 + 7x - 3}{2x^2 - x - 6}$$

$$۲) \frac{13}{2x - 6} - \frac{2x}{x^2 - 9}$$

$$۳) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \div (x + y)$$

$$۴) \frac{m^3 - n^3}{(mn - n^2)^2} \div \frac{mn + m^2}{m^2 - n^2}$$

$$۵) a \div \frac{a-1}{2} - \frac{a^3 + 3a(a-1) - 1}{2a^2 + 2a} \times \frac{-4a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{4a^2}{a^2 - 1}$$

$$۶) \left(\frac{n}{m-n} + \frac{m}{m+n} \right) \left(\frac{m+n}{m^2+n^2} \right) \left(\frac{m-n}{m+n} \right)$$

حذف رادیکال از عبارات جبری

در اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ اگر قرار دهیم $a = \sqrt[3]{x}$, $b = 1$ آنگاه:

$$(\sqrt[3]{x})^3 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\text{بدون رادیکال}} = \underbrace{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}_{\text{عبارت شامل رادیکال‌ها}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید با ضرب دو عبارت در هم حاصل یک عبارت فارغ از رادیکال است. این کار اغلب به گویا کردن معروف است و یک دلیل ساده این کار این است که کلاً کار با چندجمله‌ایها و عملیات بر آنها بسیار ساده تر از کار با عبارات رادیکالی است. بویژه زمانی که عبارت رادیکالی در مخرج باشد، از بین بردن رادیکال آن امری مستحب است. به عنوان مثال ساده مخرج عبارت $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \end{aligned}$$

مثال ۲۴.۳. مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

۳) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$

۴) $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$

۵) $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+2}}$

۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$

۷) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

تمرینات تکمیلی

تمرین ۶.۳. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\left(\frac{1}{x}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4}$

۲) $125 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^p \leq 3125 \rightarrow p = ?$

۳) $10^{20} \square 20^{10}$

۴) $20^{2303} \square 30^{3202}$

۵) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$

۶) $\left(27^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} \times 32^{\frac{5}{6}} \times 81^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

۷) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{4} - \sqrt{15})$

۸) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$

تمرین ۷.۳. عبارت‌هایی که بصورت مجموع چند جمله‌اند را تجزیه کنید و آنهایی که بصورت حاصلضرب چند پرانتز هستند به کمک اتحادها ضرب کرده و ساده کنید. عملیات بر عبارات گویا را نیز انجام دهید.

۱) $(1 + x + x^2)(1 - x)(1 + x)(1 - x + x^2)$

۲) $p^4 - 6p^2q + 9q^2$

۳) $x^3y^3 + 6x^2y^2 + 12xy + 8$

۴) $(x + 3z - y)(x - y - 3z)$

۵) $(a^6 - 3a^3 + 9)(a^3 + 3)$

۶) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

۷) $2 - b^2y^3 - by$

۸) $x^3 - 8 + (x + 2)^2 - 2x$

۹) $8 - 2x - x^2$

۱۰) $\frac{3x^2 + 12x + 9}{x^6 + 5x^3 + 6}$

۱۱) $\frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{a^3}{a - 1} \times \frac{1}{a + 1}$

۱۲) $\left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) \left(x + \frac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$

۱۳) $\frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}$

۱۴) $\frac{\frac{x+1}{y}}{\frac{x+z}{yz+1}} - \frac{1}{y(xyz+x+z)}$

۱۵) $\frac{1}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}$ گویا کنید،

۱۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$

۱۷) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$

۱۸) $\frac{1}{1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$

۴.۳ تست‌های فصل سوم

۱- اگر $x + y = 7$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ کدام است؟

- (۱) ۲۱۶ (۲) ۲۳۸ (۳) ۲۴۴ (۴) ۲۶۴

۲- در تجزیه عبارت $x^2 - 6x - 4$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

- (۱) $x - 8$ (۲) $x - 4$ (۳) $x + 2$ (۴) $x + 4$

۳- حاصل $\sqrt{\frac{19}{6} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۴- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $x^2 - 10x + 21$ و $x^2 - 12x + 35$ را بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها تقسیم کرده‌ایم، حاصل تقسیم کدام است؟

- (۱) $x^2 - 8x - 15$ (۲) $x^2 - 8x + 15$ (۳) $x^2 + 8x + 15$ (۴) $x^2 + 8x - 15$

۵- حاصل عبارت $(\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{9}})\sqrt{\frac{6}{50}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴) $\frac{1}{30}$

۶- به ازای چه مقدار m ، عبارت $4x^2 - 6x + m$ مربع کامل است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۷- حاصل $999^2 - 1001^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۲۰۰۰ (۳) ۴۰۰۰ (۴) ۶۰۰۰

۸- در تجزیه عبارت $3 - 4b - b^2 - 4a - a^2$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $2a + b + 3$ (۲) $2a - b + 1$ (۳) $2a + b - 3$ (۴) $2a + b + 1$

۹- حاصل عبارت $(x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)$ کدام است؟

- (۱) $(x - 1)^2$ (۲) $(x - 1)^3(x^3 + 1)$ (۳) $x^3 - 1$ (۴) $x^6 - 1$

۱۰- مجموع ریشه‌های معادله $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۱۱- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دو جمله‌ای باشد، A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۱۲- اگر $x = 4$ باشد، حاصل $\sqrt{(-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^4}$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۹ (۳) ۷ (۴) -۷

۱۳- اگر عبارت $4x^2 - 3x + A$ مربع دو جمله‌ای باشد، A کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۱۴- عبارت $6x^2 - 5x - 6$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $3x - 2$ (۲) $2x + 3$ (۳) $2x - 3$ (۴) $3x + 4$

۱۵- عبارت $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر نیست؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $x + 2$ (۳) $x - 5$ (۴) $x + 5$

۱۶- در کدام گزینه فاکتورگیری درست انجام نشده است؟

(۱) $3x^2a + 9a^2x = 3ax(x + 3a)$

(۲) $49x^2yz + 14x^3y^2 = 7x^2y(7z + 2xy)$

(۳) $19xab + 38a^2x + 2xa = 19xa(b + 2a + 2)$

(۴) $18x^2ab + 15x^3a + 3x^2a = 3x^2a(6b + 5x + 1)$

۱۷- اگر $(a > 1)$ ، $a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ باشد، حاصل $a + \frac{1}{a}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۸- ساده شده عبارت $\sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{27}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt[4]{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt[4]{2}$ (۴) $-3\sqrt{2}$

۱۹- حاصل عبارت $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(x^2 + \frac{1}{16}\right)$ کدام است؟ ($x > 0$)

۲ (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۲۰- اگر $a + b = 3$ و $ab = 2$ باشد، مقدار $a^3 + b^3$ کدام است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۲۱- عبارت $(a^4 + 4a^2 + 16)(a - 2)(a + 2)$ با کدام عبارت زیر برابر است؟

(۱) $a^6 + 64$ (۲) $(a^3 - 8)(a^3 + 8)$ (۳) $(a^3 - 4)(a^3 + 4)$ (۴) $a^8 - 64$

۲۲- در تجزیه $4a^4 - 64$ کدام عامل وجود ندارد؟

(۱) $a^2 + 4$ (۲) $a + 2$ (۳) $a - 2$ (۴) $a^2 - 8$

۲۳- در تجزیه عبارت $x^2 - 1 + (x - 1)(y + 1)$ کدام عامل وجود دارد؟

(۱) $x + y + 2$ (۲) $x + y - 1$ (۳) $x - y + 1$ (۴) $x + y$

۲۴- کدام عامل در تجزیه عبارت $3x^2 - 5x - 2$ وجود دارد؟

(۱) $3x - 1$ (۲) $3x + 1$ (۳) $x - 1$ (۴) $x + 2$

۲۵- حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} + \sqrt{18} - \frac{(\sqrt[3]{24} - \sqrt{32})}{2}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $-2\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۲۶- حاصل $A = \frac{9}{\left(\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3}}}}\right)}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[3]{3^7}$ (۲) $3\sqrt[3]{3^7}$ (۳) $3\sqrt[7]{3^8}$ (۴) $9\sqrt[7]{3^7}$

۲۷- مقدار عبارت $x^3 - 48x^2 + 12x - 1$ به ازای $x = \frac{1}{8}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۸- در حالت کلی، کدام عامل زیر در تجزیه عبارت $1 + y - y^3 x^2 - y^2 x^2$ وجود ندارد؟
 (۱) $1 - y$ (۲) $1 + y$ (۳) $xy - 1$ (۴) $xy + 1$

۲۹- در تجزیه عبارت $25x^2 - 25x - 14$ همواره کدام یک از عامل های زیر وجود دارد؟
 (۱) $5x + 1$ (۲) $5x + 14$ (۳) $5x - 2$ (۴) $5x - 7$

۳۰- در تجزیه عبارت $x^2 + (x - 1)^2 - x$ همواره کدام عامل زیر وجود دارد؟
 (۱) $2x - 1$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x + 1$ (۴) $2x$

۳۱- در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟
 (۱) $x - 4$ (۲) $x - 2$ (۳) $x + 2$ (۴) $x + 3$

۳۲- مقدار x در تساوی $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}\sqrt{x}} = \sqrt[4]{8}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt[4]{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[4]{4}$ (۴) ۴

۳۳- حاصل $(\sqrt{32} + \sqrt[3]{32} - \sqrt{50})^{13}$ کدام است؟
 (۱) $(2\sqrt{2})^{13}$ (۲) $(\sqrt{2})^{13}$ (۳) ۱ (۴) صفر

۳۴- اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})^2$ کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۰

۳۵- عبارت $6x^3 + 7x^2 + 2x$ را تجزیه نموده ایم. یکی از عوامل تجزیه همواره کدام است؟
 (۱) $3x + 2$ (۲) $2x - 1$ (۳) $x + 2$ (۴) $2x + 3$

۳۶- اگر $(a - 3)(a + 4) = 18$ باشد، مقدار $a(a + 4)$ کدام می تواند باشد؟
 (۱) -۴۵ (۲) ۱۲ (۳) ۲۱ (۴) ۳۲

۳۷- حاصل $3\sqrt{32} - \frac{1}{4}\sqrt{200} + \sqrt{8}$ کدام است؟
 (۱) $9\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $7\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۳۸- در تجزیه عبارت $2x^2 - 5x - 3$ کدام دوجمله ای وجود دارد؟
 (۱) $x + 3$ (۲) $2x + 1$ (۳) $x - 1$ (۴) $3x + 1$

۳۹- حاصل 998×1002 را با استفاده از کدام اتحاد می توان به سهولت محاسبه نمود؟

(۱) $(a+b)^2$ (۲) $(a-b)^2$ (۳) $(a+b)(a-b)$ (۴) $(x+a)(x+b)$

۴۰- کسر $\frac{4}{\sqrt[3]{8}}$ با کدام عدد زیر برابر است؟

(۱) $2\sqrt[4]{2}$ (۲) $\sqrt[4]{2}$ (۳) $4\sqrt[4]{2}$ (۴) $2\sqrt[4]{4}$

۴۱- در حاصل عبارت $(2x^2 - 3x - 2)^2$ ضریب x^3 کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۱۲ (۴) -۱۲

۴۲- عبارت $6x^2 - 5x - 6$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

(۱) $3x - 1$ (۲) $2x + 3$ (۳) $3x + 2$ (۴) $2x - 1$

۴۳- با افزودن کدام عدد به عبارت $4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$ مربع یک دوجمله ای حاصل می شود؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۴- حاصل عبارت $\sqrt[6]{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} - \frac{6}{\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{12}$

۴۵- در تجزیه عبارت $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

(۱) $a - 6$ (۲) $a - 3$ (۳) $a - 2$ (۴) $a + 2$

۴۶- حاصل عبارت $\sqrt[2]{2}(\sqrt{50} - \sqrt[4]{4}) + 8^{-\frac{2}{3}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{33}{4}$ (۲) $\frac{29}{4}$ (۳) $\frac{33}{2}$ (۴) $\frac{25}{2}$

۴۷- حاصل $\frac{4\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{300}}{\sqrt{3}}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

۴۸- ساده شده‌ی عبارت A کدام است؟

$$A = \frac{\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}} \times \left(\sqrt{(32)^{-1}} \right)$$

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۴۹- کدام عامل زیر در تجزیه‌ی هر دو عبارت $9x^2 - 3x - 2$ و $18x^2 + 12x + 2$ ، به‌طور مشترک، وجود دارد؟

(۱) $3x - 3$ (۲) $3x + 2$ (۳) $3x + 1$ (۴) $3x - 1$

۵۰- اگر $A = (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})$ و $B = \sqrt{27} + 5$ باشند، حاصل $1 + \frac{2A}{B}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1 - \sqrt{3}$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

۵.۳ کلید تست‌های فصل سوم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
☐	☐	☐	☒	- ۳۷	☐	☐	☒	☐	- ۱
☐	☐	☒	☐	- ۳۸	☒	☐	☐	☐	- ۲
☐	☒	☐	☐	- ۳۹	☒	☐	☐	☐	- ۳
☐	☐	☐	☒	- ۴۰	☐	☐	☒	☐	- ۴
☒	☐	☐	☐	- ۴۱	☐	☐	☐	☒	- ۵
☐	☒	☐	☐	- ۴۲	☐	☐	☒	☐	- ۶
☐	☐	☐	☒	- ۴۳	☐	☒	☐	☐	- ۷
☐	☒	☐	☐	- ۴۴	☒	☐	☐	☐	- ۸
☐	☒	☐	☐	- ۴۵	☒	☐	☐	☐	- ۹
☐	☐	☐	☒	- ۴۶	☐	☐	☐	☒	- ۱۰
☐	☒	☐	☐	- ۴۷	☒	☐	☐	☐	- ۱۱
☒	☐	☐	☐	- ۴۸	☐	☒	☐	☐	- ۱۲
☐	☒	☐	☐	- ۴۹	☒	☐	☐	☐	- ۱۳
☐	☐	☐	☒	- ۵۰	☐	☒	☐	☐	- ۱۴
					☐	☒	☐	☐	- ۱۵
					☐	☒	☐	☐	- ۱۶
					☒	☐	☐	☐	- ۱۷
					☐	☐	☐	☒	- ۱۸
					☒	☐	☐	☐	- ۱۹
					☐	☐	☒	☐	- ۲۰
					☐	☐	☒	☐	- ۲۱
					☒	☐	☐	☐	- ۲۲
					☐	☐	☐	☒	- ۲۳
					☐	☐	☒	☐	- ۲۴
					☐	☐	☒	☐	- ۲۵
					☐	☐	☒	☐	- ۲۶
					☐	☐	☒	☐	- ۲۷
					☐	☐	☒	☐	- ۲۸
					☒	☐	☐	☐	- ۲۹
					☐	☐	☐	☒	- ۳۰
					☐	☒	☐	☐	- ۳۱
					☐	☐	☒	☐	- ۳۲
					☒	☐	☐	☐	- ۳۳
					☐	☐	☐	☒	- ۳۴
					☐	☐	☐	☒	- ۳۵
					☐	☐	☒	☐	- ۳۶

فصل ۴

معادلات و نامعادلات

در این فصل بسیار مهم با حل انواع معادلات و نامعادلات آشنا می‌شویم. در ابتدا حل معادله درجه دوم را بررسی کرده و سپس یک منحنی مرتبط با معادله درجه دوم یعنی سهمی‌ها را بررسی کرده، و در نهایت تعیین علامت عبارات جبری را که نقشی کلیدی در حل نامعادلات دارند را بررسی می‌کنیم.

۱.۴ معادله درجه دوم و روش‌های حل آن

معادله درجه دوم چیست؟ فرض کنید هدف یافتن عددی است که وقتی با مربعش جمع می‌شود حاصل برابر ۶ شود. برای یافتن جواب می‌توان آزمون-خطا کرد و با چندبار امتحان عدد ۲ را یافت که در شرایط صدق می‌کند. اما فقط عدد ۲ جواب است؟ اگر بخواهیم بازهم آزمون-خطا کنیم این بار به سادگی دفعه قبل نمی‌توان جواب را یافت که البته عدد ۳- است. حال فرض کنید بخواهیم مسئله را بدون آزمون-خطا حل کنیم. بدین منظور فرض کنید عدد مورد نظر را با x نشان دهیم. پس باید داشته باشیم $x^2 + x = 6$. حال معادله را بصورت $x^2 + x - 6 = 0$ مینویسیم. چگونه می‌توان مسئله را حل کرد؟ پاسخ تجزیه است. داریم:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) = 0 \implies (x + 3)(x - 2) = 0 \implies x = 2 \text{ \& } x = -3$$

معادله شکل گرفته در بالا یک معادله درجه دوم است چرا که مجهول ما یعنی x در این معادله دارای توان ۲ است.

تعریف ۱.۴. به معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ یک معادله درجه دوم گوییم بشرطی که $a \neq 0$ باشد. اعداد $a, b, c \in \mathbb{R}$ را ضرائب معادله می‌نامیم. x مجهول معادله است و منظور از حل معادله فوق یعنی یافتن تمام اعداد حقیقی چون x که در معادله صدق کنند. با این حساب عدد λ جواب معادله است هرگاه:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

حال به معرفی روش‌های حل این معادله می‌پردازیم.^۱ برای این منظور با توجه به وضعیت ضرائب معادله

^۱ محمد ابن موسی خوارزمی ریاضیدان نامی ایران و جهان در قرن هشتم و نهم میلادی است. خوارزمی بحق از نوادر تاریخ ریاضیات

روش هایی ارائه می شود.

روش ریشه گیری

اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ داشته باشیم $c \leq 0$ & $b = 0$ آنگاه با یک ریشه گیری جواب معادله بدست می آید. مثلاً برای حل معادله $4x^2 - 16 = 0$ داریم:

$$4x^2 - 16 = 0 \implies 4x^2 = 16 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

روش فاکتورگیری

اگر در معادله درجه دوم داشته باشیم $b = 0$ با یک فاکتورگیری ساده معادله حل می شود. به عنوان یک مثال ساده برای حل معادله $3x^2 + 12x = 0$ داریم:

$$3x^2 + 12x = 0 \implies 3x(x + 4) = 0 \implies x = 0 \text{ و } x = -4$$

روش تجزیه

چنانچه هیچ یک از ضرائب صفر نباشد به کمک تجزیه کردن سه جمله ای می توان معادله را حل کرد. در این مورد توجه داریم که از یکی از خواص اعداد حقیقی استفاده می کنیم که قبلاً به آن اشاره کرده ایم:

$$\text{if } ab = 0 \implies a = 0 \text{ یا } b = 0$$

به یک مثال ساده برای حل معادله $x^2 - x - 12 = 0$ داریم:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \implies \begin{cases} x - 4 = 0 \implies x = 4 \\ x + 3 = 0 \implies x = -3 \end{cases}$$

تمرین ۱۰۴. معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) 9x^2 - 25 = 0$$

$$۲) 4x^2 + 16 = 0$$

$$۳) 25x^2 + 5x = 0$$

$$۴) -\frac{1}{4}x = \frac{8}{3}x^2$$

$$۵) x^2 + 11x + 30 = 0$$

$$۶) 6x^2 + x = 2$$

$$۷) x^2 + 9x - 136 = 0$$

$$۸) x^3 + x^2 = 56x$$

است و وی را پدر جبر نام نهاده اند. وی معادله درجه دوم را طبقه بندی کرد و برای هر کدام روش حل ارائه داد.

روش مربع کامل کردن

تصور کنید می‌خواهید جواب معادله $x^2 + 2x - 1 = 0$ را بدست آورید. هرچه تلاش کنید، معادله به روش‌های معمول اشاره شده در بالا حل نخواهد شد. پس باید راهکار تازه‌ای بکار برد. بدین منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x = 1 &\implies x^2 + 2x + 1 = 1 + 1 \\ &\implies (x + 1)^2 = 2 \\ &\implies x + 1 = \pm\sqrt{2} \\ &\implies x = \sqrt{2} - 1 \text{ \& } x = -\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

اگر خوب به محاسبات نگاه کنید هدف از اضافه کردن عدد ۱ به طرفین تساوی این بوده است که یک طرف معادله مربع کامل شود تا بتوان از طرفین جذر گرفت و جواب را یافت. چرا عدد ۱؟ جواب در محاسبه زیر نهفته است. در حالت کلی برای اینکه عبارت $x^2 + bx$ را به عبارتی تبدیل کنیم که شامل مربع کامل باشد به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$$x^2 + bx = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

به عنوان مثالی دیگر فرض کنید می‌خواهیم جواب معادله $3x^2 - 9x + 3 = 0$ را حل کنیم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 9x + 3 = 0 &\implies x^2 - 3x + 1 = 0 \\ &\implies x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = 0 \\ &\implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 1 \\ &\implies x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\implies x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ \& } x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

روش کلی حل معادله درجه دوم

همان‌طور که مثال‌های حل شده بالا ملاحظه کردید، روش مربع کامل کردن کمی وقت‌گیر و پرمحاسبه است. به همین دلیل یکبار روش مربع کامل را روی فرم کلی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بکار می‌بریم تا دستوری کلی بر حسب رادیکال‌ها بیابیم و بعد از آن برای حل از دستور یافت شده استفاده کنیم. قبل از شروع محاسبات مبین معادله درجه دوم را بصورت $\Delta = b^2 - 4ac$ تعریف می‌کنیم. Δ یک عدد حقیقی است و لذا هر سه حالت $\Delta = 0$, $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ ممکن است اتفاق بیافتد.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \implies x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \implies x &= \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد. اگر $\Delta = 0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta < 0$ باشد گوییم معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > 0 \implies \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = 0 \implies x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \implies & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

درس را با ارائه‌ی مثال‌های کلی از مطالب مطرح شده پی می‌گیریم.

کلمه حقیقی اشاره به اعداد حقیقی دارد. در واقع در حالتی که $\Delta < 0$ است بازهم معادله جواب دارد اما این جواب‌ها عدد حقیقی نیستند بلکه اعداد مختلط هستند که در فصل یک به آن‌ها اشاره‌ای داشته‌ایم. کارل فردریش گاوس در پایان نامه دوره‌ی دکتری خود ثابت کرد که یک معادله از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

تجزیه $۱) ۴x^2 - ۴x + ۱ = ۰$

تجزیه $۲) ۸x^2 - ۷x - ۱ = ۰$

مربع کامل $۳) x^2 + ۵x = ۱$

مربع کامل $۴) ۳x^2 + ۲x = ۵$

روش دلتا $۵) ۴x^2 + ۴x - ۷ = ۰$

روش دلتا $۶) ۲۰x + ۱ = ۲۱x$

مثال ۲.۴. یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $۲x^2 + ax + ۳a - ۵ = ۰$ برابر ۱ است. ریشه دیگر معادله را بدست آورید.

مثال ۳.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید که معادله $x^2 - (a + ۲)x + ۲a = ۰$ دارای ریشه مضاعف باشد و سپس آن ریشه مضاعف را بدست آورید.

مثال ۴.۴. از چه عدد مثبتی اگر معکوس آن کم شود باقیمانده برابر $\frac{۵}{۶}$ می‌شود؟

مثال ۵.۴. طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۸۸ واحد باشد، محیط مستطیل را بدست آورید.

مثال ۶.۴. طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر $۲x + ۲$, $۲x + ۱$, $۲x$ است. محیط این مثلث چند واحد است؟

مثال ۷.۴. جواب معادله $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} = \frac{x^2+1}{x^2+x-6}$ را بیابید.

مثال ۸.۴. حاصل عبارت $A = ۲\sqrt{۳+۲\sqrt{۳+۲\sqrt{۰۰۰}}}$ را بیابید.

تمرین ۲.۴. حاصل عبارت $A = \sqrt[۲]{۵\sqrt[۳]{۵\sqrt[۴]{۵\sqrt[۵]{۰۰۰}}}}$ را بدست آورید.

تمرین ۳.۴. معادلات زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

مربع کامل $۱) ۵x^2 + ۶x - ۸ = ۰$

روش دلتا $۲) ۷x^2 - ۵x + ۲ = ۰$

تمرین ۴.۴. معادله‌ی $x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}(x - \frac{1}{x}) = ۵$ را حل کنید.

تمرین ۵.۴. معادله $(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴) + ۱ = ۰$ را حل کنید.

تمرین ۶.۴. معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ را حل کنید.

تمرین ۷.۴. معادله‌ی $x^4 + ۲۵ = ۲۶x^2$ را حل کنید.

تمرین ۸.۴. معادله‌ی $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۹.۴. یک درهم را بین چند مرد تقسیم کرده ایم ولی چون یک مرد به آن‌ها اضافه شده است، تقسیم را دوباره بین همه‌ی مردها انجام داده‌ایم. معلوم شد در تقسیم دوم به هر مرد $\frac{1}{6}$ درهم کمتر از تقسیم اول رسیده است. در آغاز چند مرد بوده است؟ (مسئله خوارزمی)

تمرین ۱۰.۴. معادله‌ی $x^2 - (2 + 2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۱.۴. یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر در ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

تمرین ۱۲.۴. حدود m را طوری بیابید تا معادله‌ی درجه دوم $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

تمرین ۱۳.۴. اختلاف مربع عدد $\frac{3}{7}$ از خود $\frac{3}{7}$ برابر اختلاف مربع چه کسری از خود آن کسر است؟

تمرین ۱۴.۴. ثابت کنید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \implies x_1 = 1 \text{ \& } x_2 = \frac{c}{a} \\ a + c = b \implies x_1 = -1 \text{ \& } x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

تمرین ۱۵.۴. معادلات داده شده را به روش دلخواه حل کنید.

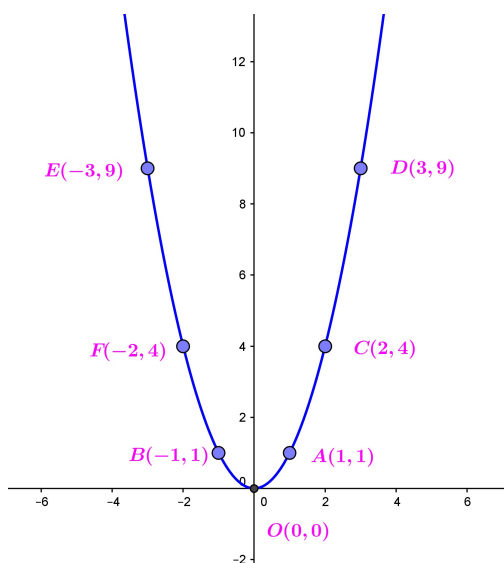
$$۱) ۱۴۸x^2 + 2x = ۱۵۰ \qquad ۲) \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$۳) (1 + \sqrt{2})x^2 = x + \sqrt{2} \qquad ۴) ۱۳۹۵x^2 - ۱۳۹۴x - ۱ = 0$$

$$۵) x^4 - ۱۳x^2 + ۳۶ = 0 \qquad ۶) x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$$

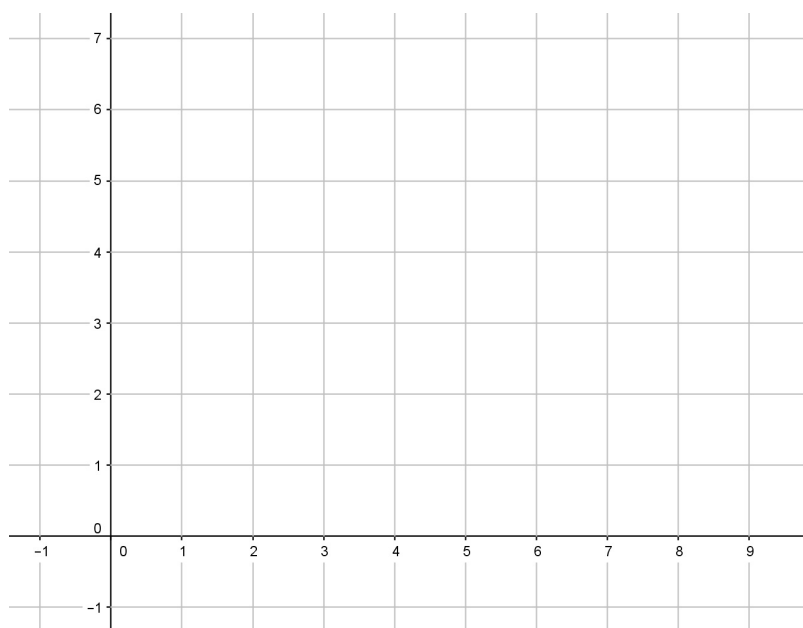
۲.۴ سهمی‌ها

یکی از کاربردی‌ترین منحنی‌ها در زندگی روزمره ما سهمی است. سهمی که سه بعدی شده سهمی است، امروزه نقش اصلی در ارسال و دریافت اطلاعات از طریق هوایی را دارد. نام امروزی سهمی (parabola) را آپولونیوس معرفی کرد و نیوتن اولین بار خاصیت همگرایی نور در کانون سهمی را بررسی کرد. ساده‌ترین سهمی دارای معادله‌ی $y = x^2$ است. اگر به متغیر x مقدار دهیم می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم. مثلاً با فرض $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, 0$ مقادیر حاصل عبارتند از $1, 4, 9, 0, y$. اگر این نقاط را روی محورهای مختصات مشخص کنیم و نقاط حاصل را به هم وصل کنیم شکل زیر حاصل می‌شود.



ذکرچند نکته ضروری است. اول اینکه پایین‌ترین نقطه سهمی در شکل فوق مبداء مختصات است. نقطه $O(0, 0)$ را مینیمم (کمینه) سهمی گوئیم. دوم اینکه محور عرض‌ها سهمی را به دو قسمت یکسان تقسیم کرده است. محور عرض‌ها $x = 0$ را محور تقارن سهمی گوئیم.

مثال ۹.۴. سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ را رسم کنید.



تعریف ۲.۴. منظور از یک سهمی معادله‌ای بصورت $y = ax^2 + bx + c$ است که $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ با مربع کامل کردن این عبارت بصورت:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

درمی‌آید که در این حالت راس سهمی یا مینیمم سهمی نقطه $M(h, k)$ است و خط $x = h$ را محور تقارن سهمی گوئیم. اگر $a > 0$ باشد دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی رو به پایین باز می‌شود.

مثال ۱۰.۴. راس سهمی‌های زیر را بیابید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$۱) y = ۲x^۲ + ۱$$

$$۲) y = -x^۲ + ۴$$

$$۳) y = x^۲ + ۴x + ۳$$

$$۴) y = ۱ - \frac{x^۲}{۲}$$

$$۵) y = ۱ - ۴x - ۲x^۲$$

$$۶) ۳y = x^۲ - ۴x + ۷$$

رسم سهمی ساده‌تر می‌شود اگر بتوانیم دستوری صریح از راس سهمی بدست آوریم. برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned} y = ax^۲ + bx + c &\implies y = a \left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲} + \frac{c}{a} \right) \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{۲a} \right)^۲ - \frac{b^۲}{۴a} + c \\ &\implies y = a \left(x + \frac{b}{۲a} \right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \end{aligned}$$

با این حساب راس سهمی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{راس سهمی} \rightarrow M \left(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \right)$$

به این ترتیب با داشتن راس سهمی کافیت یک یا دو نقطه قبل و بعد از آن را در معادله منحنی جایگذاری کنیم تا عرض آن نقاط حاصل شده و سپس سهمی را رسم کنیم. همچنین توجه کنید که اگر $a > ۰$ باشد سهمی مینیمم دارد و اگر $a < ۰$ باشد سهمی ماکزیمم (بیشینه) دارد.

مثال ۱۱.۴. نمودار سهمی $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x + \frac{۱}{۲}$ را رسم کنید.

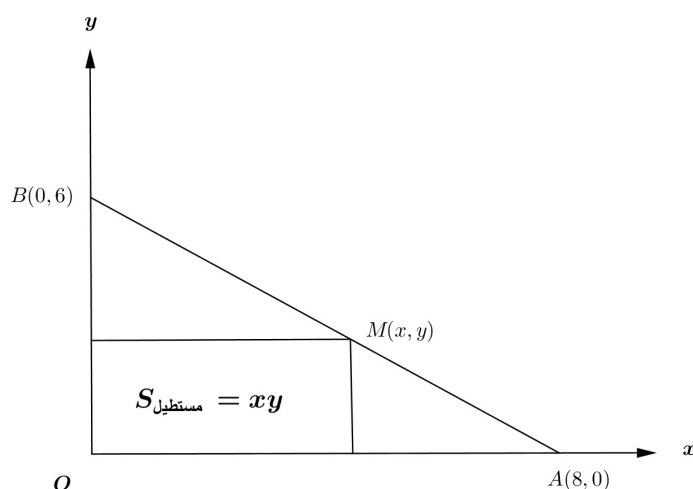
مثال ۱۲.۴. مجموع دو عدد مقدار ثابت ۲۰ است. بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد را بدست آورید.

مثال ۱۳.۴. مستطیلی به اضلاع ۲۰ و ۶۰ واحد مفروض است. اگر یک واحد به عرض آن اضافه کنیم دو واحد از طول آن کم می‌شود. در بین مستطیل‌هایی که به این ترتیب ساخته می‌شود کدامیک بیشترین مساحت را داراست؟

مثال ۱۴.۴. یک طناب به طول ۸۸ متر در دسترس است. با این طناب قرار است زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است حصار شود. بیشترین مساحتی که می‌توان با این طناب حصار کرد چقدر است؟

مثال ۱۵.۴. مقدار a را به گونه‌ای بیابید تا ماکزیمم سهمی $y = ax^2 + 4x + 5$ برابر ۹ شود.

مثال ۱۶.۴. بیشترین مساحت ممکنه برای مستطیل زیر را بیابید.



مثال ۱۷.۴. موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از دستور $y = -5t^2 + 50t + 55$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد. پس از چند ثانیه موشک به زمین می‌خورد؟

تمرین ۱۶.۴. سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$۱) y = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

$$۲) y = 6x^2 - 24x + 24$$

$$۳) y = 4 - 2x - 2x^2$$

$$۴) y = 4x^2 + 28x = 49$$

$$۵) y = 2x - 3 - x^2$$

$$۶) y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12}x - 1$$

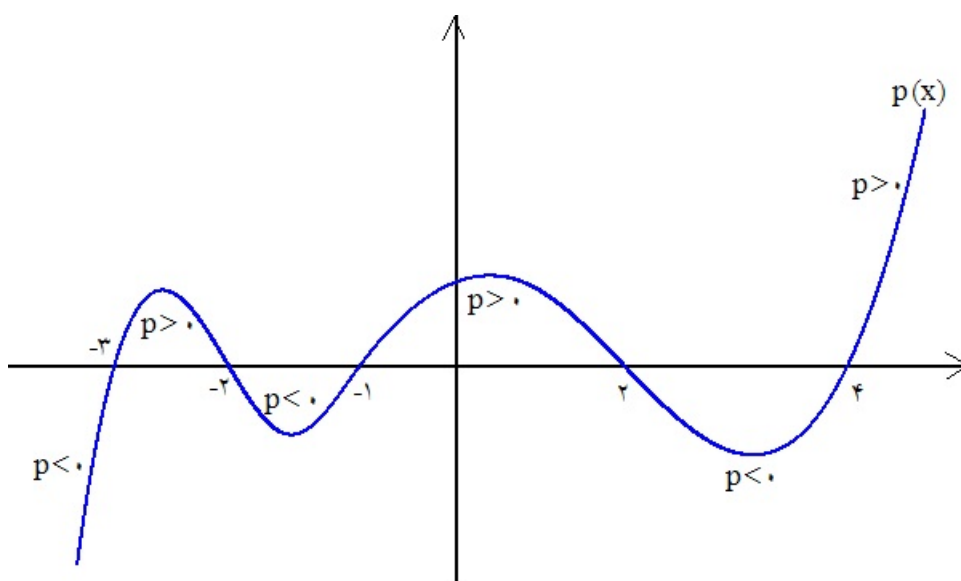
تمرین ۱۷.۴. بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل که یک طرف آن رودخانه است و با طناب می‌توان حصار کرد ۶۴۸ متر است. طول طناب را بیابید.

تمرین ۱۸.۴. دو ضلع مستطیلی روی محورهای مختصات در ناحیه اول و زیر خط $y = \frac{6-x}{4}$ واقع است. یک راس آن روی مبدا و راس مقابلش M روی خط $y = \frac{6-x}{4}$ قرار دارد. بیشترین مساحت مستطیل وقتی $M(x, y)$ روی خط اشاره شده حرکت می‌کند را بیابید.

تمرین ۱۹.۴. اگر $x + 2y = 30$ باشد ماکزیمم مقدار حاصلضرب xy را بدست آورید.

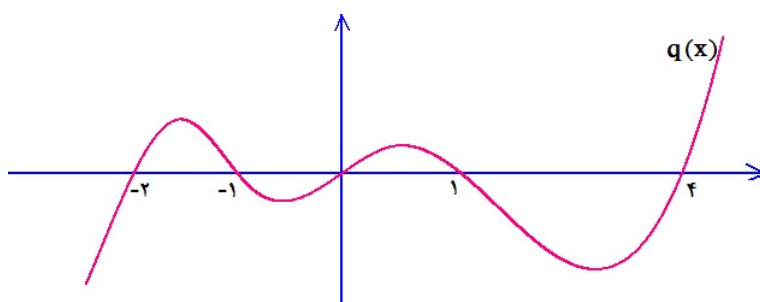
۳.۴ تعیین علامت چندجمله‌ایها

به دقت به شکل زیر نگاه کنید. نمودار یک منحنی در دستگاه مختصات ترسیم شده است. نام منحنی $p(x)$ است و در برخی بازه‌ها بالای محور x هاست و لذا مثبت است و در برخی بازه‌ها زیر محور x هاست و لذا منفی است. اگر دقت کنید نقاطی که منحنی محور طولها را در آن‌ها قطع کرده است نقشی اساسی در تعیین اینکه p مثبت است یا منفی بازی می‌کند. چنین نقاطی را ریشه‌های p گوئیم. در حالت کلی نقاط حاصل از حل معادله $p(x) = 0$ را ریشه‌های p گوئیم.



$$\left\{ \begin{array}{ll} x < -3 \implies p(x) < 0 & \text{گوئیم عبارت منفی است} \\ -3 < x < -2 \implies p(x) > 0 & \text{گوئیم عبارت مثبت است} \\ -2 < x < -1 \implies p(x) < 0 & \\ \vdots & \\ x > 4 \implies p(x) > 0 & \end{array} \right.$$

مثال ۱۸.۴. با توجه به شکل علامت منحنی $q(x)$ را تعیین کنید.

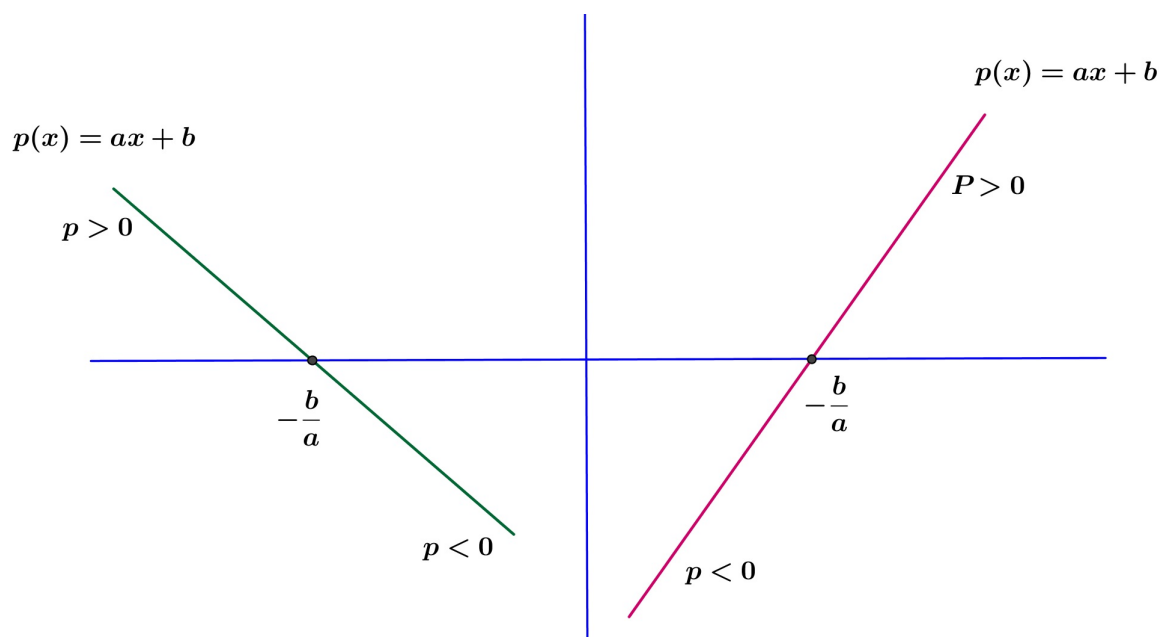


۱.۳.۴ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

می‌خواهیم عبارت $p(x) = ax + b$ را تعیین علامت کنیم. ابتدا ریشه‌ها یا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم:

$$p(x) = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

در حالت کلی نمودار $p(x) = y = ax + b$ یکی از دو حالت زیر را دارد:



از نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p < 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p > 0 \end{cases} \\ a < 0 \implies \begin{cases} x < -\frac{b}{a} \implies p > 0 \\ x > -\frac{b}{a} \implies p < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

خلاصه بحث فوق در جدول زیر که آن را جدول تعیین علامت می‌نامیم آمده است.

x	$-\frac{b}{a}$	
$p(x)=ax+b$	مخالف علامت a	موافق علامت a

مثال ۱۹.۴. علامت عبارات $p(x) = 2x - 4$, $q(x) = (6 - 2x)^3$ را تعیین کنید.

تذکر مهم: چنانچه بخواهیم علامت یک عبارت جبری را که شامل چند دوجمله‌ای درجه اول است را تعیین کنیم، می‌توانیم در یک جدول همه‌ی دوجمله‌ایها را نوشته و ریشه تک‌تک آنها را یافته و هر کدام را تعیین علامت کنیم و دست آخر با ضرب علامت‌ها درهم علامت کل عبارت را بیابیم. مثال زیر را که به همین طریق حل می‌شود به دقت نگاه کنید.

مثال ۲۰.۴. عبارت $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)^5$ را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱.۴. چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ را تعیین علامت کنید.

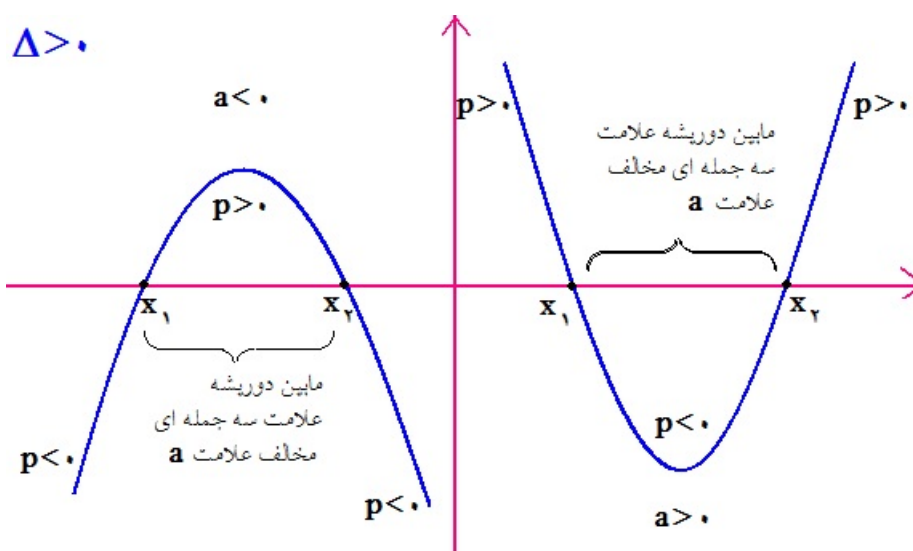
مثال ۲۲.۴. عبارت $A = \frac{(1-x)(x+2)}{(x+1)(x-3)^2}$ را تعیین علامت کنید.

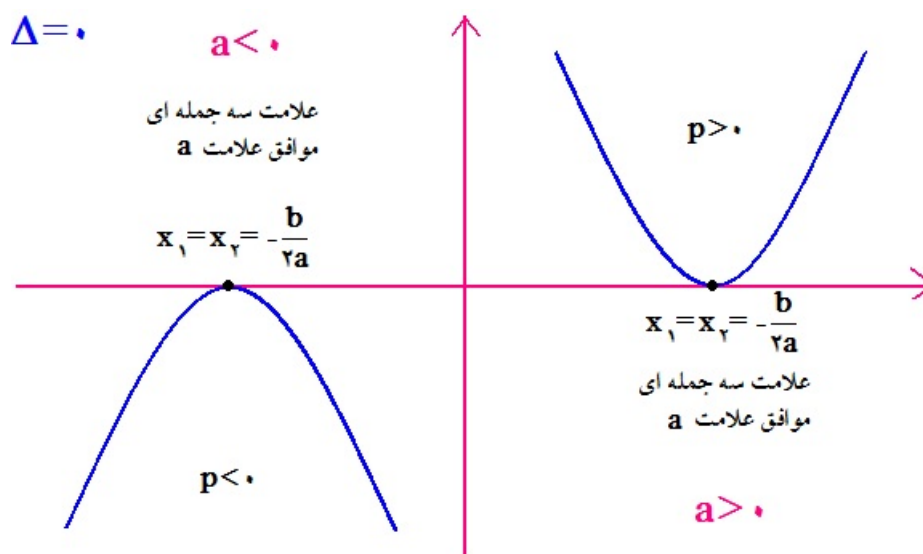
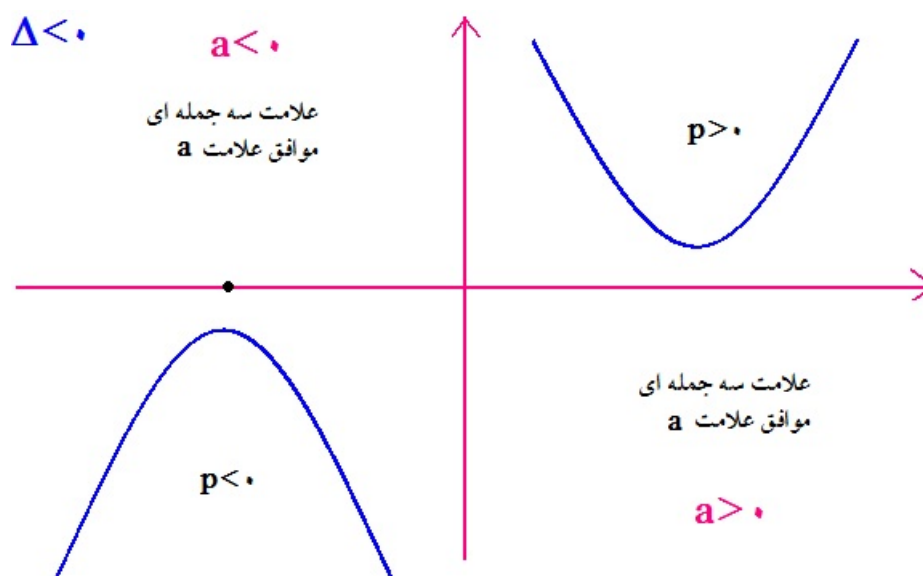
مثال ۲۳.۴. سهمی $y = x^2 - 2x - 8$ مفروض است. معین کنید در چه بازه‌ای سهمی زیر محور طولها و در چه بازه‌ای بالای محور طولهاست؟

۲.۳.۴ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

همان‌طور که تا الان متوجه شدید یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان با تجزیه به عامل‌های درجه اول تعیین علامت کرد. اما این زمانی شدنی است که عبارت تجزیه شود. در صورتیکه عبارت تجزیه نشود راه‌حل چیست؟ راه‌حل یافتن روشی است که به کمک آن بتوان سه‌جمله‌ای‌ها را مستقیماً تعیین علامت کرد. در حالت کلی یک سه‌جمله‌ای درجه دوم یا همان سهمی به یکی از صورت‌های زیر است:

الف: اگر $\Delta > 0$



ب: اگر $\Delta = 0$ ج: اگر $\Delta < 0$ 

پس برای تعیین علامت سه جمله‌ای $p(x)$ ابتدا باید $p(x) = 0$ را حل کنیم. پس اولین گام یافتن مبین معادله درجه دوم است یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ است که بسته به علامت Δ یکی از جداول زیر را تشکیل می‌دهیم. اگر $\Delta > 0$ باشد:

x	x_1	x_2
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت مخالف a

اگر $\Delta = 0$ باشد:

x	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	علامت موافق a

اگر $\Delta < 0$ باشد:

x	سه جمله ای ریشه ندارد	
$p = ax^2 + bx + c$	علامت موافق a	

تذکر: نتایج حاصل از بررسی نمودارهای یک سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان از روی معادله سه‌جمله‌ای درجه دوم $p(x) = ax^2 + bx + c$ نیز بدست آورد. برای این منظور فرم تبدیل شده‌ی عبارت p را که قبلاً محاسبه کرده‌ایم بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 p(x) = ax^2 + bx + c &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{p(x)}{a} &= \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)
 \end{aligned}$$

حال اگر $\Delta < 0$ باشد عبارت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ همواره مثبت است پس $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی اگر a مثبت باشد آنگاه $p(x)$ هم مثبت است. و اگر a منفی باشد آنگاه $p(x)$ هم منفی است.

حال اگر $\Delta = 0$ باشد عبارت حاصل بصورت $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ درمی‌آید و باز $\frac{p(x)}{a}$ مثبت است و مانند حالت قبل نتیجه حاصل می‌شود.

سرانجام اگر $\Delta > 0$ باشد پس $\sqrt{\Delta}$ با معنی است و داریم:

$$\frac{p(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad (*)$$

عبارت‌های داخل پرانتز که بلافاصله بعد از x آمده‌اند همان ریشه‌های معادله $p(x) = 0$ هستند. اگر قرار دهیم:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

آنگاه معادله (*) بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{p(x)}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

بدون آنکه استدلال دچار نقصان شود می‌توان فرض کرد $x_1 < x_2$ است. (چرا) حال برای بررسی علامت $\frac{p(x)}{a}$ باید حالات زیر را بررسی کرد.

۱. اگر $x_1 < x < x_2$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ منفی است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ منفی است و این یعنی $p(x)$ و a از نظر علامت مخالف هم هستند. (این همان عبارت جدول تعیین علامت است)

۲. اگر $x < x_1 < x_2$ باشد و یا $x_1 < x_2 < x$ باشد عبارت $(x - x_1)(x - x_2)$ مثبت است و لذا $\frac{p(x)}{a}$ هم مثبت است و این یعنی $p(x)$ و a هم علامت هستند.

همان‌طور که مشاهده کردید نتایج بدست آمده در این حالت منطبق بر نتایج بدست آمده از نمودارهای هندسی است.

درس را با بررسی چند مثال پی می‌گیریم.

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) p = 2x^2 - x - 3$$

$$۲) p = -x^2 + x + 2$$

$$۳) A = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$$

$$۴) p = (x^2 - 9)(3x - 1)$$

$$۵) B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

$$۶) C = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x - 3)}$$

تمرین ۲۵.۴. تعیین علامت کنید.

$$۱) p = \frac{1}{3}x - 1$$

$$۲) p = (6 - 3x)(2 + 2x)$$

$$۳) A = \frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{(4-x)(5-x)}$$

$$۴) B = \frac{x^2 + x + 2}{4 - 3x - x^2}$$

$$۵) C = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

$$۶) D = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}(x^2 + 4x + 4)}$$

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است. حتی ممکن است p لزوماً چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

خواص اصلی نامساوی‌ها

$$۱) a \leq b \implies a + c \leq b + c$$

$$۲) a \leq b \implies \begin{cases} c > 0 \implies ac \leq bc \\ c < 0 \implies ac \geq bc \end{cases}$$

$$۳) a \leq b \text{ \& } b \leq c \implies a \leq c$$

$$۴) 0 < a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$$

$$۵) a \leq b < 0 \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$$

$$۶) a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

مثال ۲۵.۴. نامساوی $-8x + 3(x - 2) > -x + 2$ را حل کنید و مجموعه جواب آن را بصورت بازه نمایش دهید.

مثال ۲۶.۴. نامعادله $\frac{2x+3}{5} \leq \frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ را حل کنید.

مثال ۲۷.۴. حدود پارامتر m را طوری تعیین کنید تا معادله درجه دوم $x^2 + mx + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد.

مثال ۲۸.۴. سهمی $y = x^2 + ax + b$ محور طولها را در دو نقطه با طول‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند. اولاً مقادیر a, b را بیابید و ثانياً معین کنید که نمودار این سهمی در چه بازه‌ای زیر خط $y = -3$ قرار می‌گیرد.

مثال ۲۹.۴. نامعادله $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \geq 0$ را حل کنید.

مثال ۳۰.۴. نامعادله $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال ۳۱.۴. نامعادله $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}$ را حل کنید.

مثال ۳۲.۴. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x - 3 \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۳۳.۴. نامعادله $\frac{(x-4)(x^2-5x+6)(x^2+x+2)}{(-2x^2+x-5)(x^2-2x+1)} < 0$ را حل کنید.

مثال ۳۴.۴. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ برای هر مقدار x مثبت باشد.

مثال ۳۵.۴. نامعادله $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} < 1$ را با شرط $x > 0$ حل کنید.

تمرین ۲۱.۴. مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{x+1}{1-x} \leq 2$ را بیابید.

تمرین ۲۲.۴. حدود m را چنان بیابید که نابرابری زیر همواره درست باشد.

$$\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} > -1$$

تمرین ۲۳.۴. مجموعه جواب نامعادله $(2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{x}} < (2 - \sqrt{3})^{2+x}$ با شرط $x > 0$ را بدست آورید.

تمرین ۲۴.۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3-x^2}{x} > 2$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} < 1$$

$$۳) \frac{3x^2-3x}{x^3-1} > 1$$

$$۴) -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2}$$

$$۵) \frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$$

$$۶) \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+4}$$

$$۷) \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} > \frac{2x+4}{x-2}$$

$$۸) (x + \sqrt{x})(2x^2 + x - 15) < 0$$

تمرین ۲۵.۴. اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ برای هر مقدار x منفی باشد حدود تغییرات a را بدست آورید.

تمرین ۲۶.۴. نامعادله $\frac{5}{3}x + 2 \leq 2x - 1 \leq 3x + 1$ را حل کنید.

تمرین ۲۷.۴. نامعادله $\frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$ را حل کنید. (ببینید امکان معکوس کردن طرفین نامعادله وجود دارد؟)

۵.۴ قدرمطلق و معادلات و نامعادلات قدرمطلق

در کلاس نهم با قدرمطلق آشنا شده‌اید. یادآوری می‌کنیم که قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. قدر مطلق x را که با نماد $|x|$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳.۴.۴. قدرمطلق عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $|1 + \sqrt{2}|$

۲) $|1 + t^2|$

۳) $|1 - \sqrt{2}|$

۴) $\left|1 - \frac{\pi}{3}\right|$

مهم‌ترین خواص قدرمطلق ها

۱) $|u| = 0 \implies u = 0$

۲) $|u| = a \implies u = \pm a, a > 0$

۳) $|u| \leq a \implies -a \leq u \leq a, a > 0$

۴) $|u| \geq a \implies u \geq a \text{ یا } u \leq -a, a > 0$

۵) $u^2 \leq a^2 \iff |u| \leq a \iff -a \leq u \leq a, a > 0$

۶) $u^2 \geq a^2 \iff |u| \geq a \iff u \geq a \text{ یا } u \leq -a, a > 0$

۷) $\begin{cases} |u| = u \iff u \geq 0 \\ |u| = -u \iff u \leq 0 \end{cases}$

۸) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ نامساوی مثلثی

۹) $|ab| = |a||b| \quad \& \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

مثال ۳۷.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |x^3 - 9x| = 0$$

$$۲) |3x - 5| = 4$$

$$۳) |2x - 1| < 1$$

$$۴) |1 - x| \geq 2$$

$$۵) |x^2 + x - 2| = 2 - x - x^2$$

$$۶) |2x - 1| < x$$

مثال ۳۸.۴. ثابت کنید $|a - b| = |b - a|$.

مثال ۳۹.۴. فرض کنید $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ با این مفروضات ثابت کنید $|ab - c| < 20$.

مثال ۴۰.۴. در نامساوی مثلی چه زمانی تساوی رخ می‌دهد؟ یعنی تحت چه شرایطی روی a , b نتیجه می‌شود: $|a + b| = |a| + |b|$.

مثال ۴۱.۴. معادله‌ی $|x^2 - 1| + |2 - x^3| = 1$ را حل کنید.

مثال ۴۲.۴. معادله‌ی $|x - 1| + |x + 1| = 2$ را حل کنید.

مثال ۴۳.۴. نامعادله‌ی $|x^3 - x| \leq x$ را حل کنید.

مثال ۴۴.۴. مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x - 1| + |x + 3| > 2$ را بدست آورید.

تمرین ۲۸.۴. حاصل قدرمطلق‌های زیر را بدست آورید.

$$۱) |\sqrt{7} - 3|$$

$$۲) |\sqrt{2} + \sqrt{3} - \pi|$$

$$۳) |\sqrt{10} - 3|$$

$$۴) |\sqrt{2} - 1/41|$$

$$۵) |\pi - 3/14|$$

$$۶) |1 - 2^{\pi}|$$

تمرین ۲۹.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |b(b - 1)| = b$$

$$۲) |b| + |b - 1| = 0$$

$$۳) |b - 1| + |b| = b$$

$$۴) |x^2 - 1| < 1$$

$$۵) 2 \leq |b| \leq 3$$

$$۶) |x| + x = 2$$

تمرین ۳۰.۴. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) ||x| - x| = ۳$$

$$۲) ||x| + ۱| = ۱$$

$$۳) ||x| + x| = ۱$$

$$۴) |x| > x + ۲$$

$$۵) |x| - |x + ۱| = ۱$$

$$۶) |x| + |x + ۲| = ۳$$

$$۷) |x| = \frac{1}{x}$$

$$۷) |x^2 - x| < x$$

$$۹) \left| a - \frac{1}{a} \right| = |a - ۱|$$

$$۱۰) |۳x - ۵| = |x + ۲|$$

تمرین ۳۱.۴. به ازای چه مقدار m همواره رابطه $mx^2 - ۲(m - ۱)x + ۱ > ۰$ همواره برقرار است؟

تمرین ۳۲.۴. به کمک تعیین علامت نامساوی بسیار مهم و کلیدی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{cases} x > ۰ \implies x + \frac{1}{x} \geq ۲ \\ x < ۰ \implies x + \frac{1}{x} \leq -۲ \end{cases}$$

تمرین ۳۳.۴. به کمک رابطه‌ی تمرین قبل کمترین مقدار عبارات زیر را بیابید.

$$A = \frac{x^4 + ۲x^2 + ۲}{x^2 + ۱} \quad B = \frac{x^4 + ۲}{\sqrt{x^4 + ۱}}$$

تمرین ۳۴.۴. حل کنید.

$$۱) \frac{1}{x - x^2} > ۴$$

$$۲) ۴ + x^2 > ۳۰ - x^2$$

$$۳) \frac{x^2 - ۲x}{\sqrt{x} + ۱}$$

$$۴) (x^2 + ۲\sqrt{2}x + ۲)(x^2 - ۴) \leq ۰$$

$$۵) mx^3 + mx + \frac{1}{m} < ۰ \rightarrow m = ?$$

$$۶) ۲x^2 - (a - ۳)x + \frac{1}{8} > ۰ \rightarrow a = ?$$

$$۷) x^3 - ۴x^2 - x + ۴ < ۰$$

$$۷) x^4 - ۳x^2 < ۴$$

$$۹) \frac{x^2 + x - ۲}{x^2 + ۵x + ۶} < ۰$$

$$۱۰) x(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳) \leq ۲۴$$

۶.۴ تست‌های فصل چهارم

۱- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $\{x: -1 < x < 1\}$ (۲) $\{x: -2 < x < 2\}$ (۳) $\{x: 0 < x < 2\}$ (۴) $\{x: -2 < x < 1\}$

۲- در کدام فاصله نامساوی $(x - 1)(2 - x) > 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < -1$ (۲) $x < 1$ (۳) $x > 2$ (۴) $1 < x < 2$

۳- اگر $A = \{x | x > 5\}$ و $B = \{x | x < -1\}$ آنگاه علامت عبارت $x(x - 2)(x - 4)$ بر A و B کدام است؟
 (۱) بر A منفی و بر B مثبت
 (۲) بر A مثبت و بر B منفی
 (۳) بر A و B هر دو مثبت
 (۴) بر A و B هر دو منفی

۴- جوابهای معادله $\frac{1 - 2x}{x + 2} + \frac{x + 1}{x - 2} = 0$ کدام است؟
 (۱) $-1, 1$ (۲) صفر، 1 (۳) صفر، 8 (۴) $1, 8$

۵- به ازای چه مقادیری از x نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2} < 0$ برقرار است؟
 (۱) $-2 < x < 1$ (۲) $1 < x < 2$ (۳) $-1 < x < 2$ (۴) $-2 < x < -1$

۶- اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - (4a + 4)x + (3a^2 + 6a + 3) = 0$ برابر 2 باشد ریشه دیگر کدام است؟
 (۱) -6 (۲) -3 (۳) 3 (۴) 6

۷- به ازای کدام مقدار a ریشه‌های معادله $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟
 (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۸- جوابهای دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 2x - \frac{x}{3} < 1 \\ \frac{x}{2} - 2 < x \end{cases}$ کدام است؟
 (۱) $x > -4$ (۲) $x < \frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{5} < x < 4$ (۴) $-4 < x < \frac{3}{5}$

۹- محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟
 (۱) $(0, 0)$ (۲) $(1, -1)$ (۳) $(1, 1)$ (۴) $(1, 1)$ و $(0, 0)$

۱۰- ریشه‌های معادله $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام اند؟
 (۱) $-1, \frac{1}{2}$ (۲) $1, -\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

۱۱- اگر یک ریشه معادله $ax^2 - 35x + 357 = 0$ برابر ۱۷ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۱۲- عدد $\frac{2}{3}$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + bx - 4 = 0$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) -۶

۱۳- مجموعه جواب دستگاه نامعادله‌های $\begin{cases} 5x - 2 > 3 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{x \mid x > 4\}$ (۲) $\{x \mid x < 4\}$ (۳) $\{x \mid x > 1\}$ (۴) $\{x \mid 1 < x < 4\}$

۱۴- کدام مجموعه، جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 10 - 5x < 0 \\ \frac{x}{2} + 2 > x \end{cases}$ است؟

- (۱) $\{x: 2 < x < 4\}$ (۲) $\{x: 2 < x < 5\}$ (۳) $\{x: 4 < x < 5\}$ (۴) $\{x: 5 < x < 10\}$

۱۵- اگر $a > b > 0$ ، $c < d < 0$ کدام نامساوی همواره صحیح است؟

- (۱) $ac > bd$ (۲) $ac < bd$ (۳) $ad < bc$ (۴) $ad > bc$

۱۶- ۴ برابر عددی از ۱۲ برابر آن عدد ۹ واحد کمتر است معکوس آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{-8}{9}$ (۴) $\frac{-9}{8}$

۱۷- در معادله درجه دوم $3x^2 + mx - 20 = 0$ یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{5}{3}$ است ریشه دیگر کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۸- مجموعه همه جوابهای نامعادله $\frac{2\sqrt{x+2}}{3\sqrt{x+1}} > 1$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, 1)$

۱۹- اگر به ازای همه مقادیر m ، $4x^2 - 2mx + 4m^2 \geq 0$ باشد، آنگاه حدود m کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $|m| \leq 2$ (۴) $|m| \geq 2$

۲۰- فرض کنیم a و b مختلف‌العلامه باشند و $a < b$ در این صورت کدام نامساوی همواره برقرار است؟

- (۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^3 < b^3$ (۳) $b^2 < a^3$ (۴) $b^3 < a^3$

۲۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x^2+1)} \geq 0$ کدام است؟

(۱) $\{x \mid x \leq 1\}$ (۲) $\{x \mid x < 1\}$ (۳) $\{x \mid x \geq 1\}$ (۴) $\{x \mid x > 1\}$

۲۲- فرض کنید p و q و r اعداد حقیقی و $r < 0$ ، $pq \neq 0$ ، $pr > qr$ آنگاه همواره:

(۱) $-p > -q$ (۲) $-p > q$ (۳) $q > -p$ (۴) $p > q$

۲۳- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

۲۴- نسبت دو عدد برابر $\frac{3}{5}$ و مجموع مربعاتشان ۱۶۶۶ است. مجموع دو عدد کدام است؟

(۱) ۴۵ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۶۵

۲۵- اگر معادله درجه دوم $(m-1)x^2 + 4x + (m+2) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

(۱) $-2 \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

۲۶- مجموعه جوابهای حقیقی نامعادله $\frac{3}{4}x(x-1)^2 > x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > -3\}$ (۲) $\{x : x < -1\}$ (۳) $\{x : x < -2\}$ (۴) $\{x : -3 < x < -1\}$

۲۷- دو برابر مقدار مثبتی از ثلث مربع آن مقدار ۹ واحد کمتر است. این مقدار کدام است؟

(۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

۲۸- تعداد جوابهای معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۹- حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی از ۵ برابر عدد کوچکتر ۳۲ واحد بیشتر است مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۱۹ (۳) ۱۷ (۴) ۱۵

۳۰- حاصلضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است مجموع این دو عدد کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۳۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند به طوری که $0 < x < y$ آنگاه:

(۱) $\frac{-1}{x} < \frac{-1}{y}$ (۲) $-x < -y$ (۳) $-x + y < 0$ (۴) $\frac{-1}{y} < \frac{-1}{x}$

۳۲- اگر a و b متوالی علامه و ناصفر باشند، حاصل عبارت $4 - (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ همواره کدام است؟
 (۱) مثبت (۲) منفی (۳) کوچکتر یا مساوی صفر (۴) بزرگتر یا مساوی صفر

۳۳- مجموعه جوابهای نامعادله $|x|(x^2 - 3x + 2) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[1, 2]$ (۲) $\{0\} \cup [1, 2]$ (۳) $[-2, -1]$ (۴) $\{0\}, [-2, -1]$

۳۴- مجموعه جوابهای $x^4 - 1 \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $(-\infty, +1]$ (۲) $[-1, +1]$ (۳) $[-1, +1]$ (۴) $[-1, +\infty)$

۳۵- عدد ۳۶ را به دو قسمت چنان تقسیم کرده‌ایم که حاصلضرب آن دو ماکزیمم است. آن دو قسمت کدامند؟
 (۱) ۱۲ و ۲۴ (۲) ۱۶ و ۲۰ (۳) ۱۸ و ۱۸ (۴) ۲۲ و ۱۴

۳۶- مجموعه جوابهای نامعادله $(x^2 - 4)(x^2 + \sqrt{2}x + 2) \leq 0$ کدام است؟
 (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (۳) $[-\infty, -2] \cup [2, \infty[$ (۴) $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$

۳۷- حدود تغییرات x در نامعادله $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1) > 0$ کدام است؟
 (۱) $1 < x < 3$ (۲) $-3 < x < -1$ (۳) $x > 3$ یا $x < 1$ (۴) $x > -1$ یا $x < -3$

۳۸- کمترین مقدار عبارت $x^2 - x + 2$ وقتی که x تغییر می‌کند، کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۳۹- کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$ در کدام فاصله زیر منفی است؟
 (۱) $(-\infty, 1)$ (۲) $(2, 3)$ (۳) $(3, 4)$ (۴) $(2, \infty)$

۴۰- جواب نامعادله $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟
 (۱) $-4 < x < 4$ (۲) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 2$ یا $x < -2$ (۴) $x > 4$ یا $x < -4$

۴۱- جوابهای نامعادله $\frac{3x^2 - 3x}{x^3 - 1} > 1$ کدام است؟
 (۱) $R - \{1\}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $\{x : x > 1\}$ (۴) $\{x : x < 1\}$

۴۲- حاصل ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد، ۴۰ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۳- اگر $x \geq 3$ ، مجموعه جوابهای نامعادله $|x - 3| - 2 \leq x^2$ کدام است؟
 (۱) $\{x : 3 \leq x \leq 4\}$ (۲) $\{x : 3 \leq x \leq 5\}$ (۳) $\{x : x \leq 4\}$ (۴) $\{x : x \geq 5\}$

۴۴- اگر $\forall a, b \in \mathbb{R} ; a < b < 0$ ، آنگاه کدام نامساوی نادرست است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

(۱) $a^{2n+1} > b^{2n+1}$ (۲) $a^{2n} > b^{2n}$
 (۳) $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$ (۴) $\frac{-1}{a} < \frac{-1}{b}$

۴۵- مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| > 2x - 8$ کدام است؟

(۱) $\{x : x > 7\}$ (۲) $\{x : x > 9\}$
 (۳) $\{x : x < 1 \text{ یا } x > 7\}$ (۴) $\{x : x < 1 \text{ یا } x > 9\}$

۴۶- اگر $|a| < |b|$ و b^3 منفی باشد، آنگاه همواره:

(۱) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۲) $a < b$ (۳) $a > b$ (۴) $a^2 > b^2$

۴۷- در معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ ، با شرط $b = c + 1$ ، یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت است؟

(۱) $-c$ (۲) $2b - 1$ (۳) $\frac{b}{2}$ (۴) c

۴۸- رابطه بین x و y به صورت $2x + y = 16$ است. بیشترین مقدار xy وقتی x تغییر می‌کند، کدام است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۴۲

۴۹- جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} \geq x-1 \\ x(x-4) \leq x^2-16 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{4\}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $\{x : x \geq 4\}$ (۴) $\{x : x \leq 4\}$

۵۰- در بازه‌ای، مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع با ضابطه $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟

(۱) $(-2, 1)$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $(0, 1)$

۵۱- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصلضرب آنها می‌نیم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۵۲- جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

(۱) $x < \frac{2}{3}$ (۲) $x > \frac{3}{4}$ (۳) $x > \frac{7}{6}$ (۴) $x < \frac{5}{4}$

۵۳- در معادله‌ی $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۴- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $x < 3$ (۲) $1 < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $-2 < x < 3$

۵۵- جواب نامعادله‌ی $\frac{x-1}{x+1} > 2x$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x < -1\}$ (۲) $\{x : x > -1\}$ (۳) $\{x : -1 < x < 1\}$ (۴) $\{x : -2 < x < -1\}$

۵۶- در یک قطعه زمین اگر ۲۰ درخت میوه با فاصله‌های مساوی کاشته شود، پس از رشد کافی از هر درخت به طور متوسط ۶۰ کیلوگرم میوه برداشت می‌شود، به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود، دو کیلوگرم از متوسط محصول آن کم می‌شود. حداکثر برداشتی با این فرضیه کدام است؟

- (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۲۴۰ (۳) ۱۲۵۰ (۴) ۱۲۸۰

۵۷- جواب نامعادله زیر کدام است؟ $-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

- (۱) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ (۲) $-1 \leq x \leq 1$ (۳) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۴) $-2 \leq x \leq 1$

۵۸- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$

۵۹- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) $\emptyset$ (۴) R

۶۰- جواب مشترک دو نامعادله $\frac{3x-1}{3} > 3x-2$ و $\frac{3x+5}{2} - \frac{2x-4}{3} > \frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $-2 < x < 2$ (۲) $-4 < x < 1$ (۳) $-2 < x < 1$ (۴) $-4 < x < 2$

۶۱- بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

- (۱) ۹۵۸ (۲) ۹۶۸ (۳) ۹۷۸ (۴) ۹۸۸

۶۲- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-2| < 2x - x^2$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(1, 2)$

۶۳- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 - 2x| < x$ کدام بازه است؟

- (۱) $(0, 1)$ (۲) $(0, 3)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(1, 3)$

۷.۴ کلید تست‌های فصل چهارم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
☐	☒	☐	☐	- ۳۷	☒	☐	☐	☐	- ۱
☒	☐	☐	☐	- ۳۸	☒	☐	☐	☐	- ۲
☐	☒	☐	☐	- ۳۹	☐	☐	☒	☐	- ۳
☐	☐	☒	☐	- ۴۰	☐	☒	☐	☐	- ۴
☐	☐	☒	☐	- ۴۱	☐	☐	☐	☒	- ۵
☐	☒	☐	☐	- ۴۲	☒	☐	☐	☐	- ۶
☐	☐	☒	☐	- ۴۳	☐	☐	☒	☐	- ۷
☐	☐	☐	☒	- ۴۴	☒	☐	☐	☐	- ۸
☐	☐	☐	☒	- ۴۵	☒	☐	☐	☐	- ۹
☐	☒	☐	☐	- ۴۶	☒	☐	☐	☐	- ۱۰
☐	☐	☐	☒	- ۴۷	☐	☐	☐	☒	- ۱۱
☐	☒	☐	☐	- ۴۸	☒	☐	☐	☐	- ۱۲
☐	☐	☐	☒	- ۴۹	☐	☐	☐	☒	- ۱۳
☐	☐	☐	☒	- ۵۰	☐	☐	☐	☒	- ۱۴
☐	☐	☐	☒	- ۵۱	☐	☐	☒	☐	- ۱۵
☒	☐	☐	☐	- ۵۲	☐	☐	☐	☒	- ۱۶
☒	☐	☐	☐	- ۵۳	☐	☐	☐	☒	- ۱۷
☐	☐	☒	☐	- ۵۴	☒	☐	☐	☐	- ۱۸
☐	☐	☐	☒	- ۵۵	☐	☐	☐	☒	- ۱۹
☐	☒	☐	☐	- ۵۶	☐	☐	☒	☐	- ۲۰
☐	☐	☐	☒	- ۵۷	☒	☐	☐	☐	- ۲۱
☐	☐	☒	☐	- ۵۸	☐	☐	☐	☒	- ۲۲
☐	☒	☐	☐	- ۵۹	☐	☐	☒	☐	- ۲۳
☐	☐	☒	☐	- ۶۰	☐	☒	☐	☐	- ۲۴
☐	☐	☒	☐	- ۶۱	☒	☐	☐	☐	- ۲۵
☐	☐	☒	☐	- ۶۲	☐	☒	☐	☐	- ۲۶
☒	☐	☐	☐	- ۶۳	☐	☐	☐	☒	- ۲۷
☐	☐	☒	☐	- ۶۴	☐	☐	☒	☐	- ۲۸
☒	☐	☐	☐	- ۶۵	☐	☒	☐	☐	- ۲۹
☐	☐	☐	☒	- ۶۶	☒	☐	☐	☐	- ۳۰
☐	☐	☐	☒	- ۶۷	☐	☐	☐	☒	- ۳۱
☒	☐	☐	☐	- ۶۸	☒	☐	☐	☐	- ۳۲
☐	☐	☒	☐	- ۶۹	☐	☐	☒	☐	- ۳۳
					☐	☒	☐	☐	- ۳۴
					☐	☒	☐	☐	- ۳۵
					☐	☐	☐	☒	- ۳۶

فصل ۵

تابع

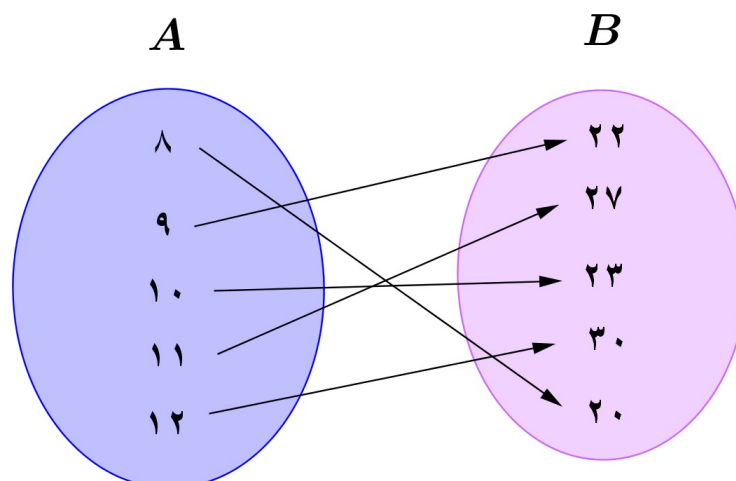
۱.۵ مفهوم تابع و روش‌های نمایش آن

در این فصل با مفهوم تابع آشنا خواهید شد. مفهومی که نقشی کلیدی در تمام شاخه‌های علوم دارد. در واقع تابع را می‌توان در زیست‌شناسی، علوم مهندسی، جغرافیا، فیزیک، شیمی و... دید. این دامنه کاربرد نشان از اهمیت تابع دارد. از نظر تاریخی نمی‌توان بطور دقیق پیدایش تابع را بررسی کرد چرا که در کتیبه‌های به جای مانده از بابلیان می‌توان تناظر بین اعداد طبیعی و مربع‌های آن‌ها و مکعب‌های آن‌ها را دید که به تعبیری تابع است. افراد دیگری هم مفهوم تابع را به کار برده‌اند که عبارتند از گالیله، دکارت، جان برنولی، گاتفرید لایبنیتز، اویلر، دالامبر، کوشی، دیریکله، ژوزف فوریه و کارل وارشراس. شاید از دوره وایرشراس به بعد مفهوم تابع بی‌عیب و نقص و کامل مانند آنچه امروز هست معرفی شد. تمامی افراد نامبرده از بزرگان تاریخ ریاضیات هستند و هرکدام در تکمیل مفهوم تابع نقش داشته‌اند.

اتاقی که در آن نشسته را در نظر بگیرید. راس هر ساعت دمای اتاق را اندازه‌گیری کنید و در یک جدول یادداشت کنید مشخصاً در یک لحظه معین دمای اتاق دو مقدار ندارد. فرض کنید جدول زیر نمایش این اعداد باشد.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۲۰	۲۲	۲۳	۲۷	۳۰

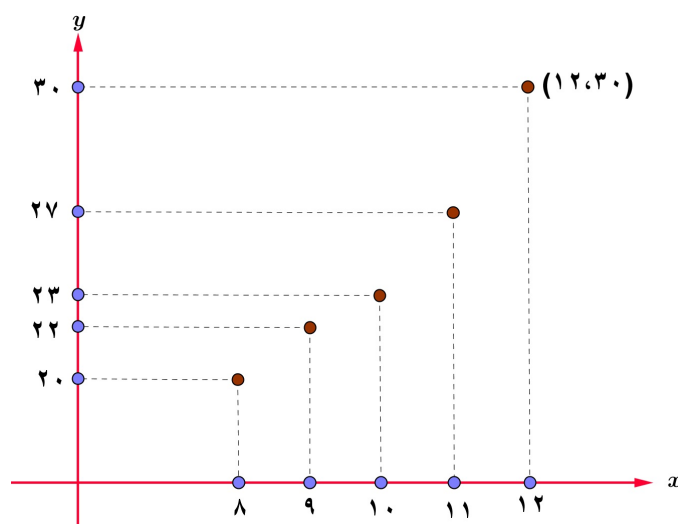
یک راه دیگر نمایش این رابطه‌ی بین زمان و درجه حرارت اتاق استفاده از نمودار ون هست. در شکل زیر این نمایش را می‌بینید. مجموعه A نشان‌دهنده‌ی زمان، و مجموعه دوم یعنی B نشان‌دهنده‌ی درجه حرارت هست. رابطه‌ی بین این‌ها با یک پیکان جهت دار نمایش داده شده است. اولاً از هر عضو مجموعه‌ی اول یک پیکان خارج شده است و هر پیکان به یک و فقط یک عضو از مجموعه‌ی B نظیر شده است.



یک راه دیگر نمایش رابطه فوق استفاده از زوج مرتب است. منظور از یک زوج مرتب نمادی بصورت (a, b) است که در آن a را مولفه اول و b را مولفه دوم گوییم. کلمه مرتب اشاره به آن دارد که ترتیب مولفه‌ها مهم است. یعنی در حالت کلی $(a, b) \neq (b, a)$. رابطه‌ی فوق بصورت زوج مرتب در زیر نمایش داده شده است:

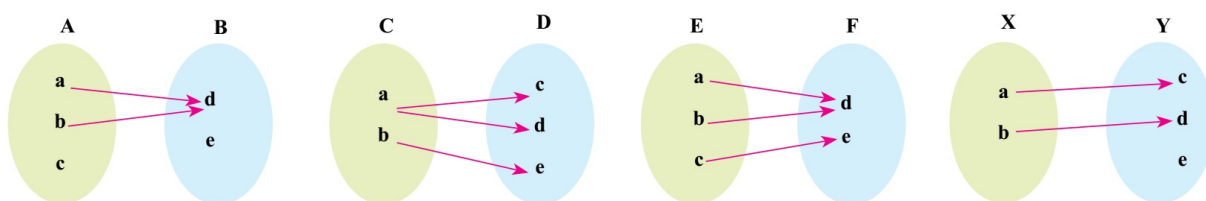
$$f = \{(8, 20), (9, 22), (10, 23), (11, 27), (12, 30)\}$$

زمانی که مولفه‌ها عدد حقیقی باشند هر زوج مرتب نشانگر نقطه‌ای روی دستگاه مختصات است. مولفه اول معرف طول و مولفه دوم معرف عرض نقطه است. نمایش رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات را در شکل زیر می‌بینید.



تعریف ۱.۵. یک تابع بین دو مجموعه A و B رابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود.

مثال ۱.۵. از نمودارهای ون زیر کدام تابع است و کدام نیست؟



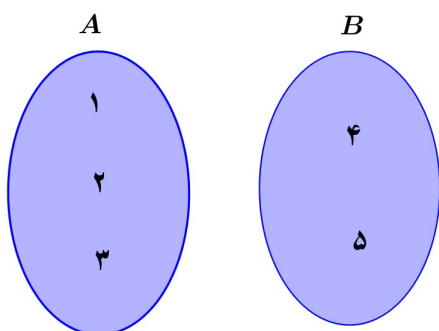
مثال ۲.۵. پیکان‌های از A به B طوری رسم کنید تا رابطه‌ی ایجاد شده تابع باشد. برای Y, X طوری رسم کنید که رابطه تابع نباشد.



مثال ۳.۵. تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر شخصی قد او را نسبت می‌دهد.
۲. رابطه‌ای که به هر شخصی وزن وی را نسبت می‌دهد.
۳. رابطه‌ای که به هر شخص غذای مورد علاقه‌اش را نسبت می‌دهد.
۴. رابطه‌ای که به هر چند ضلعی محدب مساحت آن را نسبت می‌دهد.
۵. رابطه‌ای که به هر عدد مقسوم‌علیه‌های آن عدد را نسبت می‌دهد.
۶. رابطه‌ای که به هر دو عدد طبیعی دلخواه حاصل جمع آنها را نسبت می‌دهد.

مثال ۴.۵. ۵ رابطه‌ی متفاوت بین دو مجموعه‌ی A و B زیر بنویسید که تابع باشند.



مثال ۵.۵. فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد. از رابطه‌های زیر کدام تابع است و کدام نیست؟

۱) $\{(1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$

۲) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$

۳) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

۴) $\{(2, 1), (3, 5), (2, 2), (1, 3)\}$

۵) $\{(1, 3), (2, 4)\}$

۶) $f = \{\} = \emptyset$

در مثال بالا مجموعه‌های A ، B کاملاً مشخص شده‌اند. چنانچه در مسئله‌ای فقط زوج‌های مرتب نوشته شده باشند شما می‌توانید مجموعه مولفه‌های اول را A و مجموعه مولفه‌های دوم را B می‌گیریم.

مثال ۶.۵. روابط زیر که با زوج مرتب بیان شده‌اند را بررسی کنید. کدام تابع است. کدام نیست.

$f = \{(2, -1), (3, -1), (4, -1), (5, -1)\}$

$g = \{(-1, 2), (4, 4), (3, -1), (2, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (7, -1), (-1, \sqrt{4}), (10, -1)\}$

$h = \{(1, 1)\}$

$m = \{(2, -1), (3, 4), (-2, \sqrt{2}), (3, 7), (2, \sqrt{-1})\}$

مثال ۷.۵. رابطه‌ی $f = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^2 + 3a)\}$ معرف تابع است. مقدار a را بدست آورید.

تذکر مهم: همان‌طور که در مثال بالا دیده شد یک مجموعه شامل زوج‌های مرتب زمانی تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتبی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشد و چنانچه دو مولفه اول یکسان باشند بناچار (برای تابع بودن) مولفه‌های دوم آن‌ها نیز یکسان باشند.

مثال ۸.۵. مقادیر a ، b را طوری بیابید تا رابطه‌ی f زیر تابع باشد.

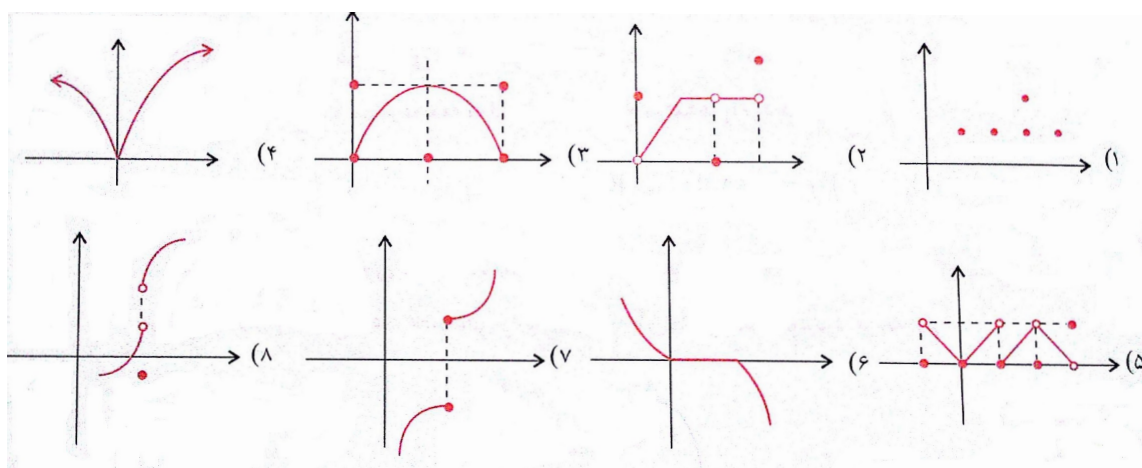
$$f = \{(a^2 + a, 1), (0, b + 4), (1, a^2 + 2b), (0, a^2 + b), (\frac{2-a}{4}, a-b)\}$$

تشخیص تابع بودن یک رابطه از روی نمودار مختصاتی آن

تاکنون متوجه شده‌اید یک نمودار پیکانی ون زمانی معرف تابع است که از هر عضو مجموعه اول یک و تنها یک پیکان به مجموعه دوم خارج شده باشد. در مورد روابطی که بصورت زوج مرتب بیان می‌شوند نیز متوجه شده‌اید که شرط تابع بودن، نبودن دو زوج مرتب متفاوت با مولفه‌های اول یکسان است. همچنین متوجه شده‌اید که روابطی که بصورت زوج‌های مرتب بیان می‌شوند و مولفه‌های آن اعداد حقیقی‌اند دارای نموداری در دستگاه مختصات هستند. حال پرسش اینجاست که اگر تنها یک نمودار به ما داده باشند چگونه از روی نمودار تشخیص دهیم که آن نمودار معرف تابع است یا خیر؟

یک نمودار در دستگاه مختصات معرف تابع است هرگاه هر خطی که به موازات محور عرض‌ها رسم شود نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۹.۵. کدام نمودار تابع است؟



۲.۵ دامنه و برد توابع

دامنه و برد یک تابع را در مثال‌های بالا دیده و بکاربرده‌ایم، بدون اینکه متوجه شده باشید. در واقع مولفه‌های اول زوج‌های مرتب در هر تابع را دامنه تابع و مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب را برد تابع می‌نامند. دامنه‌ی تابعی چون f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می‌دهیم. در اینجا برای سادگی قراردادی را معرفی می‌کنیم. اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد و عضو $a \in A$ به عضو $b \in B$ نسبت داده شده باشد یعنی $a \rightarrow b$ اغلب این عبارت را با نماد $f(a) = b$ خلاصه نویسی می‌کنیم. گاهی اوقات هم گوییم تصویر a تحت f برابر b است. مثلاً در تابع :

$$f = \left\{ (2, -1), (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), \left(\pi, \frac{1}{\pi}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right) \right\}$$

می‌نویسیم:

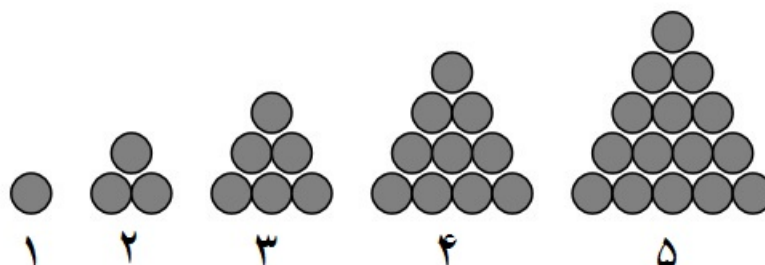
$$f(2) = -1, f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}$$

واضح است که در اینجا:

$$D_f = \left\{2, \sqrt{2}, \pi, \frac{1}{3}\right\} \quad R_f = \left\{-1, 1 - \sqrt{2}, \frac{1}{\pi}, \frac{2}{5}\right\}$$

مثال ۱۰.۵. در شکل زیر هر قسمت دارای شماره است. در شماره ۱ ما یک دایره داریم و در شکل ۲ ما سه دایره داریم و قس علی‌هذا. تابع f را اینگونه تعریف می‌کنیم که به هر مرحله تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ را نسبت دهد. با این حساب:

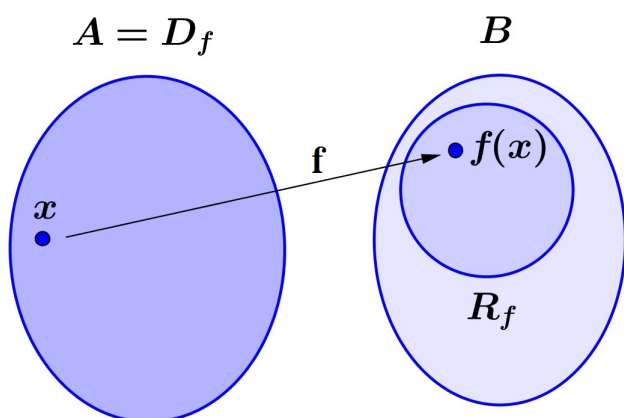
$$1 \xrightarrow{f} 1 \quad 2 \xrightarrow{f} 3 \quad 3 \xrightarrow{f} 6 \dots$$



اگر مراحل شکل بالا بی‌وقفه ادامه یابند به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

۱. دامنه تابع را بنویسید و تابع را بصورت زوج‌های مرتب نمایش دهید. آیا نوشتن تمام اعضای تابع شدنی است؟ در حالت کلی عدد $n \in \mathbb{N}$ به چه عددی تصویر می‌شود؟ دستوری برای $f(n)$ بیابید.
۲. در مرحله دهم چند دایره داریم؟ در مرحله ۲۲ ام چندتا؟
۳. در چه مرحله‌ای تعداد دایره‌های سیاه‌رنگ به ۶۶۶ می‌رسد؟
۴. برد این تابع چیست؟

در شکل زیر شناسنامه‌ی یک تابع را نوشته‌ایم.



$$R_f \subseteq B$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$$y = f(x) \leftarrow \text{قانون یا ضابطه تابع}$$

وقتی می‌نویسیم $f: A \rightarrow B$ منظور از A دامنه تابع است. اما B لزوماً برد f نیست

و همان‌طور که از شکل مشخص است همواره $R_f \subseteq B$ است.^۱ به $y = f(x)$ ضابطه یا قانون تابع گویند. مجموعه B را اغلب هم دامنه تابع f می‌نامیم.

مثال ۱۱.۵. تابع
$$\begin{cases} f : \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto x^2 + 4x \end{cases}$$
 مفروض است. برد این تابع و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

تعریف ۲.۵. به هر تابع به صورت
$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{cases}$$
 یا $y = ax + b$ یک تابع خطی گوئیم.

تذکر: در تابع خطی لزومی ندارد که دامنه تمام اعداد حقیقی باشد. ممکن است دامنه‌ی یک تابع خطی یک مجموعه متناهی، یا مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد صحیح باشد.

مثال ۱۲.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) = 2$, $f(2) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۳.۵. تابع خطی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان است که $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$, $f(5) = 5$. ضابطه‌ی این تابع را بدست آورید.

مثال ۱۴.۵. تابع خطی $f(x) = 2x - 4$ مفروض است. نمودار مختصاتی تابع را در حالتی که دامنه داده شده است رسم کنید و برد تابع را تعیین کنید.

۱. اگر دامنه تابع $D_f = \{1, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{4}, 3, \frac{7}{4}, 4\}$ باشد.
۲. اگر دامنه تابع $D_f = [1, 4]$ باشد.

مثال ۱۵.۵. در مثلث ABC اندازه‌ی زاویه A برابر 60° درجه است و اندازه‌ی دو زاویه‌ی B , C اعداد طبیعی بر حسب درجه هستند. رابطه‌ای بنویسید که اندازه‌ی زاویه C را بر حسب اندازه زاویه B مشخص کند. آیا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد آن را بدست آورید. این رابطه چند عضو دارد؟

مثال ۱۶.۵. طول مستطیلی ۵ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی بنویسید که محیط مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهید. تابع حاصل چه نوع تابعی است؟ حال تابعی بنویسید که مساحت مستطیل را بر حسب عرض آن نشان دهد. ضابطه‌ی تابع آشنا نیست؟

^۱ در سالهای بعد خواهید دید که توابعی که در آن‌ها $R_f = B$ رخ می‌دهد تابع پوشا گویند. دلیل انتخاب این نام هم واضح است. تابع توانسته است تمام مجموعه B را پوشش دهد.

مثال ۱۷.۵. تابع f از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ به این صورت تعریف شده است که اگر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ زوج باشد آنرا به نصفش یعنی $\frac{n}{2}$ نسبت می‌دهد و اگر $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد آنرا به $\frac{1-n}{2}$ نسبت می‌دهد. جدول زیر را کامل کنید. دامنه و برد تابع را بنویسید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...	n	n	...
y								...			...

چنین توابعی را توابع چندضابطه‌ای گویند. در اینجا تابع دوضابطه‌ای است و دستور آن بصورت زیر است.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{1-n}{2} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

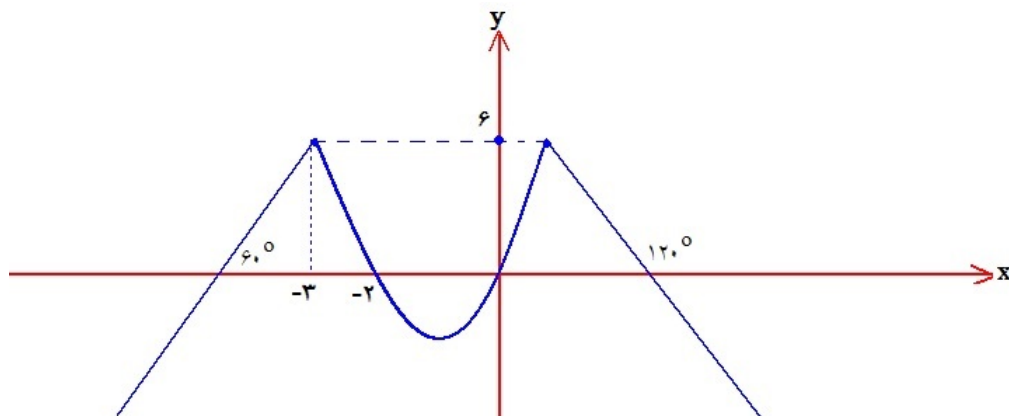
مثال ۱۸.۵. تابع سه ضابطه‌ای زیر مفروض است. نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال ۱۹.۵. نمودار تابع دوضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq -2 \\ 2x + 8 & x < -2 \end{cases}$$

مثال ۲۰.۵. نمودار تابعی بصورت زیر است. ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۳.۵ انواع توابع

در این بخش پایانی به بررسی چند نوع تابع خاص و پرکاربرد می‌پردازیم.

تابع ثابت

تابع ثابت تابعی است که تمام اعضای دامنه را به یک و فقط یک عضو از برد نظیر کند. توابع ذکر شده در زیر همگی تابع ثابت هستند.

$$۱) f = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$$

$$۲) g = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5), (7, 5), (100, 5)\}$$

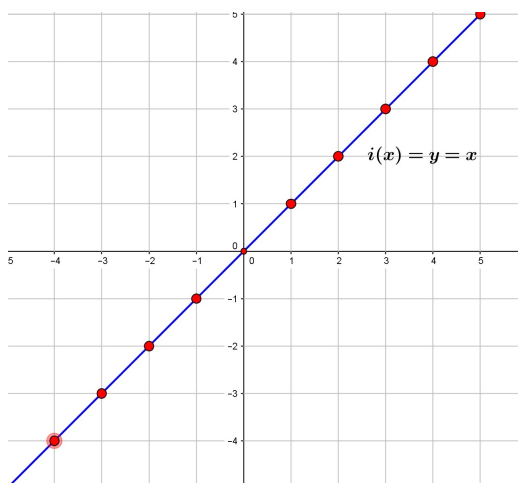
$$۳) h : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{N}, h(x) = 3$$

$$۴) q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = \sqrt{3}$$

نمودار چنین توابعی وقتی دامنه بصورت بازه باشد خطی موازی محور طول‌هاست و اگر دامنه زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد بصورت نقاطی در دستگاه مختصات است که همگی روی خطی موازی محور طول‌ها قرار دارند.

تابع همانی

تابع $i : A \rightarrow A$ را تابع همانی گوئیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $i(x) = x$. به عبارت بهتر هر عضو از دامنه به خودش نظیر می‌شود. در حالتی که دامنه $\mathbb{R}$ باشد، تابع همانی همان خط $y = x$ ، نیم‌ساز ناحیه اول و سوم است.



توابع چندجمله‌ای

فرض کنید مربعی به ضلع x دارید. مساحت این مربع بر حسب ضلع آن برابر است با: $S(x) = x^2$. همچنین مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر است با $S(r) = \pi r^2$. حجم مکعبی به ضلع x برابر است با $V(x) = x^3$ و حجم کره‌ای به شعاع r برابر $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. اینها همه نمونه‌هایی از توابع چندجمله‌ای هستند. در حالت کلی توابعی که ضابطه‌ی جبری آنها یک چندجمله‌ای از یک متغیر باشد را تابع چندجمله‌ای گوئیم. شکل کلی یک تابع چندجمله‌ای بصورت زیر است:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

آشناترین توابع چندجمله‌ای تابع دوجمله‌ای درجه اول $f(x) = ax + b$ یا همان تابع خطی است و تابع سه جمله‌ای درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که همان سهمی است. از این توابع در ضابطه‌های توابع چندضابطه‌ای زیاد استفاده می‌کنیم. برای نمونه در تابع سه ضابطه‌ای زیر هر ضابطه به تنهایی یک تابع چندجمله‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & x < 0 \\ 2x - 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3} & x > 2 \end{cases}$$

در حالت کلی در معرفی یک تابع باید دامنه آن مشخص شده باشد. درغیراین صورت بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه تابع اختیار می‌کنیم. توابع چندجمله‌ای چنانچه دامنه مشخصی نداشته باشند دامنه آنها را برابر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم.

تابع قدرمطلق

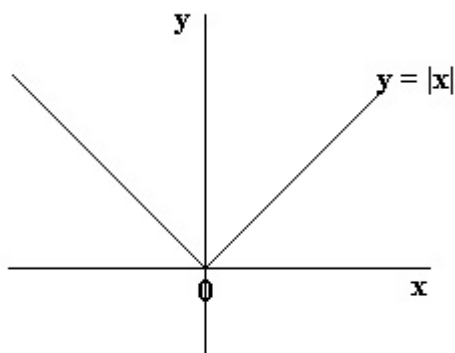
در فصل قبل با قدرمطلق و خواص آن آشنا شدید. در حالت کلی تابع قدرمطلق بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow |x|, f(x) = |x| \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم که:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x) = |x|$ یکی از مهمترین نمودارهاست و بصورت زیر است:



مثال ۲۱.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

مثال ۲۲.۵. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 - 2x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

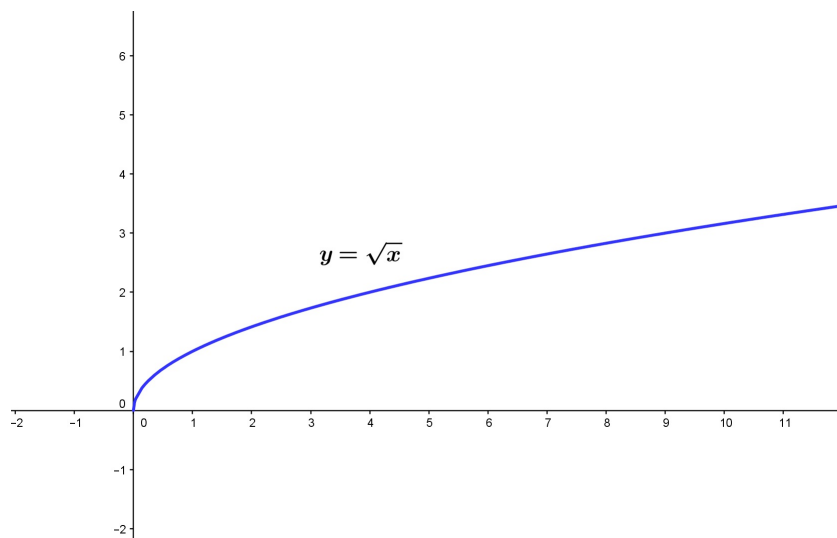
مطلوبست محاسبه $f(-5), f(\sqrt{2} - 1), f\left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2}\right)$.

معرفی دو تابع رادیکالی مهم

اولین تابع رادیکالی که می‌خواهیم بررسی کنیم تابع:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x} \end{cases}$$

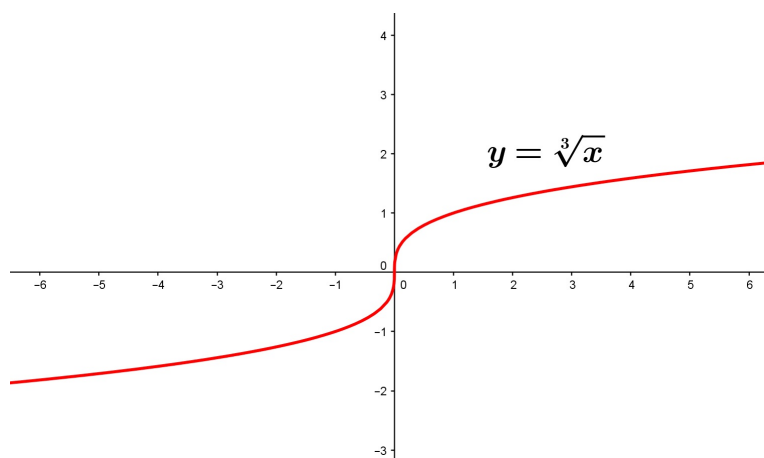
با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ است. این تابع دارای دامنه‌ای بصورت $D_f = [0, +\infty)$ است و برد آن نیز $R_f = [0, +\infty)$ است. نمودار این تابع را در شکل زیر می‌بینید.



تابع رادیکالی دیگری که قصد معرفی آن را داریم تابع ریشه سوم است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

ضابطه‌ی این تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. نمودار آن را در زیر می‌بینید:

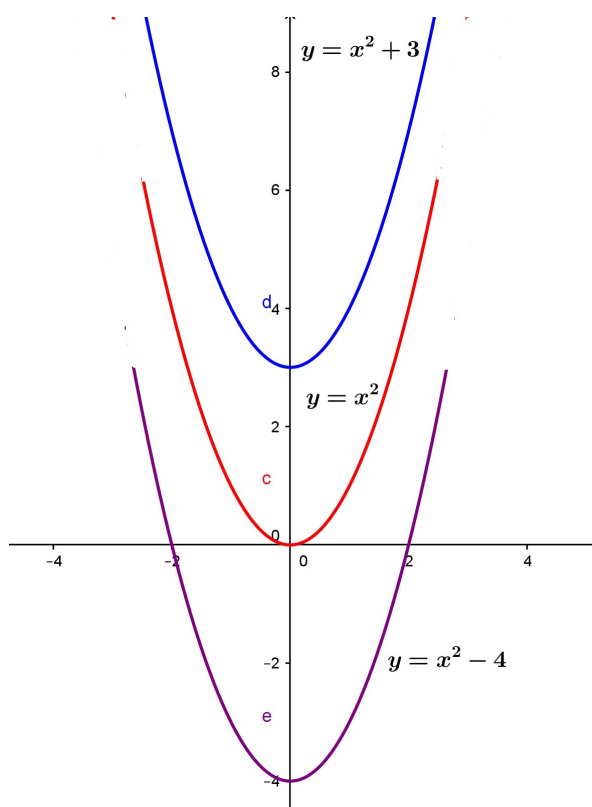
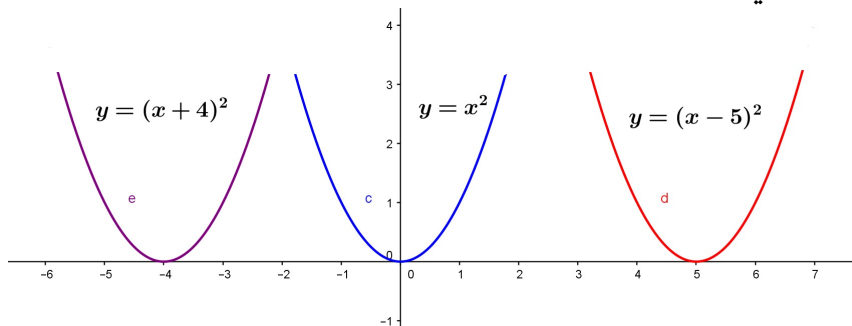


مثال ۲۳.۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$$

۴.۵ ترسیم با انتقال

در این قسمت می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارهای جدیدی را به کمک نمودارهای قبلی رسم کنیم. به دقت به شکل‌های زیر نگاه کنید.



همان‌طور که دیده می‌شود با تبدیل شدن $x \rightarrow x - 5$ نمودار $y = x^2$ به اندازه ۵ واحد در جهت مثبت روی محور طول‌ها جابجا شده است و با تبدیل $x \rightarrow x + 4$ نمودار $y = x^2$ به اندازه چهار واحد در جهت منفی روی محور طول‌ها جابجا شده است.

همچنین با تبدیل $f(x) \rightarrow f(x) + 3$ نمودار $y = x^2$ به اندازه ۳ واحد در جهت مثبت محور عرض‌ها به بالا حرکت کرده و با تبدیل $f(x) \rightarrow f(x) - 4$ به اندازه ۴ واحد روی محور عرض‌ها به پایین حرکت کرده است.

در حالت کلی همین روابط درست است. نمودار $y = f(x - a)$ ، $a > 0$ نسبت به $y = f(x)$ به اندازه a واحد در جهت مثبت محور طول‌ها حرکت کرده است و $f(x + a)$ همان تغییر منتهای در جهت منفی. به همین

ترتیب $0 < a$, $f(x) \pm a$ هم تغییرات روی محور عرض‌هاست.

مثال ۲۴.۵. به کمک انتقال نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$۱) y = (x + ۳)^۲$$

$$۲) y = x^۲ + ۳$$

$$۳) y = (x - ۲)^۲ + ۳$$

$$۴) y = ۴ - (x - ۲)^۲$$

$$۵) y = |x - ۳|$$

$$۶) y = |۲ + x|$$

$$۷) y = -|x - ۲|$$

$$۷) y = ۱ - |۱ + x|$$

$$۹) y = \sqrt{x - ۳}$$

$$۱۰) y = \sqrt{x + ۳} + ۲$$

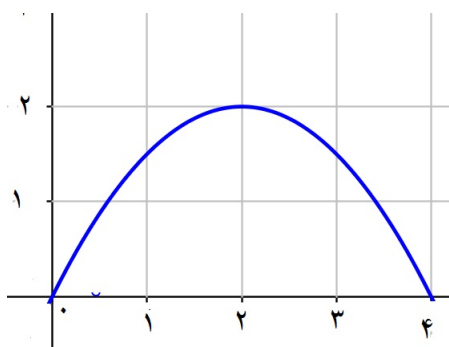
$$۱۱) y = \sqrt[۳]{x} + ۲$$

$$۱۲) y = \sqrt{-x}$$

$$۱۳) y = \sqrt{۲ - x}$$

$$۱۴) y = \sqrt[۳]{x - ۲} + ۱$$

مثال ۲۵.۵. نمودار تابع $y = f(x)$ بصورت مقابل است. نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



$$۱) y = f(x + ۲)$$

$$۲) y = f(x - ۱)$$

$$۳) y = ۳f(x)$$

$$۴) y = \frac{1}{۳}f(x)$$

$$۵) y = |f(x) - ۱|$$

$$۶) y = f(-x)$$

$$۷) y = -f(x)$$

$$۷) y = -f(-x)$$

$$۹) y = f(|x|)$$

$$۱۰) y = |f(x + ۲) - ۲|$$

بررسی تابع بودن یک رابطه‌ی جبری

در این قسمت این موضوع مهم را بررسی می‌کنیم که یک ضابطه‌ی جبری به تنهایی چه زمانی معرف تابع است. به عنوان یک مثال ساده فرض کنید هدف بررسی عبارت $|y| = x$ است. آیا این ضابطه می‌تواند معرف یک تابع باشد. یعنی به ازای هر مقدار x دقیقاً یک مقدار y بدست می‌آید؟ با قرار دادن $x = ۱$ نتیجه می‌شود $|y| = ۱$ و لذا $y = \pm ۱$ و این یعنی هم $۱ \rightarrow ۱$ و هم $۱ \rightarrow -۱$ و این یعنی این رابطه نمی‌تواند یک تابع باشد. البته برای اثبات اینکه رابطه‌ای تابع است، مثال کفایت نمی‌کند و باید ثابت کنید رابطه تابع است. برای این منظور باید گزاره‌ی زیر را در مورد آن رابطه یا ضابطه ثابت کنید.

$$\begin{cases} (x, y) \in f \\ (x, z) \in f \end{cases} \implies y = z$$

مثال ۲۶.۵. ثابت کنید رابطه‌ی $y^3 + y = x$ معرف تابع است.

مثال ۲۷.۵. روابط زیر را بررسی کنید. هر کدام که ادعا می‌کنید تابع است ثابت کنید و هر کدام که ادعا می‌کنید تابع نیست با مثال نقض نشان دهید.

۱) $x^2 + y^2 = ۵$

۲) $|x| + |y| = ۳$

۳) $x = \sin y$

۴) $y^2 = x$

۵) $|x - ۲| + |y - ۳| = ۰$

۶) $\sin y + \cos x = ۱$

تمرینات فصل تابع

تمرین ۱.۵. فرض کنید دو مجموعه A ، B بصورت زیر تعریف شده باشند:

$$A = \{\text{اصفهان, بندرعباس, رشت, شیراز, مشهد}\}$$

$$B = \{\text{مازندران, گیلان, اصفهان, هرمزگان, فارس}\}$$

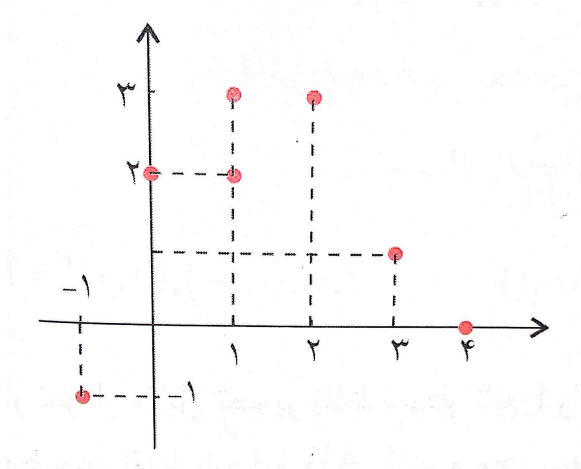
رابطه‌ی $f: A \rightarrow B$ را اینگونه تعریف می‌کنیم که $a \in A$ مرکز استان $b \in B$ باشد. f را بصورت زوج‌های مرتب بنویسید.

تمرین ۲.۵. اگر دو زوج مرتب $(a^3 + b, a^2 + 2b + ۱)$ و $(۲۰, ۹)$ برابر باشند a, b را بیابید.

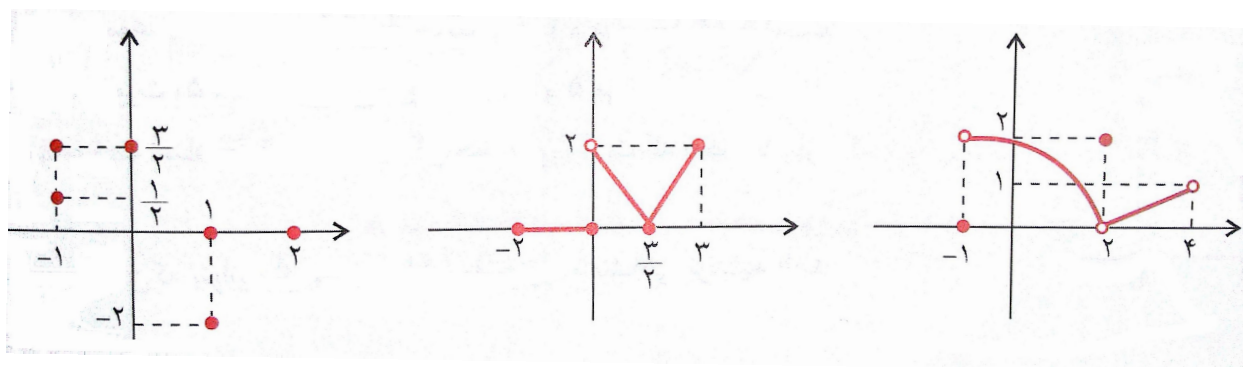
تمرین ۳.۵. اگر رابطه‌ی f زیر تابع باشد مقدار $f(m + ۱۲)$ را بیابید.

$$f = \left\{ (\sqrt{3}, ۱), (\sqrt{3} - \sqrt{2}, ۲), (m^2, ۳), \left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, m - ۲ \right), (۰, m) \right\}$$

تمرین ۴.۵. نمودار یک رابطه بصورت مقابل است. این رابطه را بصورت زوج مرتب بنویسید. آیا رابطه تابع است؟



تمرین ۵.۵. از نمودارهای زیر کدام تابع است؟ دامنه و برد آن‌ها را بنویسید.



تمرین ۶.۵. رابطه‌های زیر را بصورت زوج مرتب بنویسید. هر کدام تابع است دامنه و بردش را تعیین کنید.

۱) $f_1 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10\}$

۲) $f_2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 10, x < y\}$

۳) $f_3 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y, xy \leq 6\}$

تمرین ۷.۵. تابع f یک تابع خطی است و برای هر x داریم $f(x+2) + f(x-3) = 4x + 8$ ضابطه‌ی تابع را بیابید.

تمرین ۸.۵. تابعی مثال بزنید که دامنه آن نامتناهی بوده و برد آن یک عضو داشته باشید و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

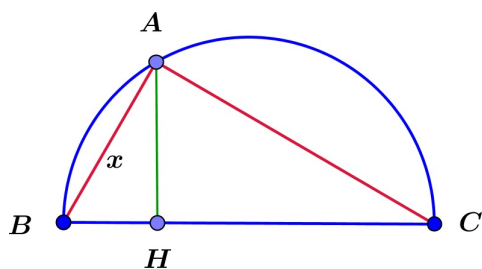
تمرین ۹.۵. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ مفروض است. مقادیر $f(5)$, $f(3)$, $f(\sqrt{10})$ را بیابید. به ازای چه مقادیری از x داریم $f(x) = 2$ و یا $f(x) = 3$. آیا می‌توان $f(0)$ را بدست آورد؟ دامنه تابع

چیست؟

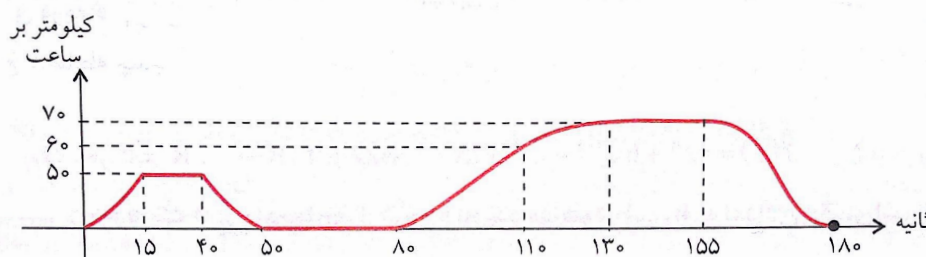
تمرین ۱۰.۵. اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد و $D_f = \{0, 1, -1, 2, 4\}$ باشد، R_f را بدست آورید.

تمرین ۱۱.۵. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ باشد و $R_f = \{2, 2\sqrt{2}, 1, 0\}$ باشد دامنه تابع را بدست آورید.

تمرین ۱۲.۵. دایره‌ای به قطر ۶ مفروض است. راس A از مثلث قائم‌الزاویه ABC روی نیم‌دایره تغییر می‌کند. اگر اندازه ضلع $AB = x$ باشد تابعی بنویسید که اندازهی ضلع AC را بر حسب x بیان کند. همچنین ضابطه‌ی تابعی را بیابید که اندازه‌ی ارتفاع AH را بر حسب x نشان دهد. دامنه این دو تابع چیست؟



تمرین ۱۳.۵. خانمی برای خرید از منزل با اتومبیل خارج شده است. نمودار زیر



نمودار سرعت زمان $v(t)$ او را از لحظه حرکت نشان می‌دهد زمان شروع را O مبدأ در نظر می‌گیریم. او پس از حرکت و مدت زمانی که در شکل نشان داده شده به یک چراغ قرمز می‌رسد و پس از سبز شدن چراغ دوباره به حرکت ادامه می‌دهد تا این‌که پس از ۱۸۰ ثانیه در پارکینگ فروشگاه توقف می‌کند.

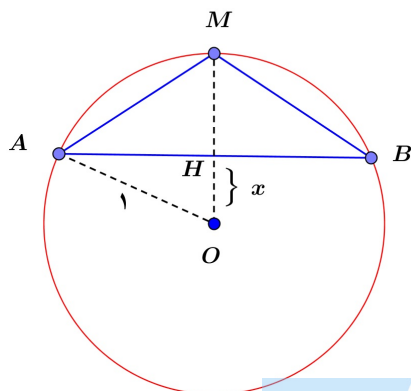
۱. آیا نمودار $y = v(t)$ یک تابع است؟ آیا می‌توانید دامنه و برد آن را پیدا کنید.

۲. در چه زمانی‌هایی سرعت او ثابت است. چه مدت او پشت چراغ قرمز می‌ایستد؟

۳. پس از ۴۵ ثانیه و همچنین ۱۲۰ ثانیه پس از حرکت سرعت آن تقریباً چقدر است؟

۴. $v(60)$ و $v(40)$ و $v(130)$ و $v(180)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۴.۵. در شکل زیر تابعی بیابید که مساحت $\triangle ABC$ را بر حسب x بیان کنید. (MH ارتفاع)



تمرین ۱۵.۵. کدام رابطه بیان‌گر یک تابع است؟

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \quad (۴) \quad |y| + x = 0 \quad (۳) \quad y^2 + |x^3 - 4x| = 0 \quad (۲) \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \quad (۱)$$

تمرین ۱۶.۵. ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. نمودار آنها را رسم کنید و تعیین کنید کدام‌ها تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 2 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

تمرین ۱۷.۵. به ازای چه مقادیر a, b تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{bx^2 + 2x + 4}$ به تابعی ثابت تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۸.۵. به ازای چه مقادیری از a, b تابع $f(x) = \frac{bx + a^2 - 4}{(a - 2)x + 3}$ به تابع همانی تبدیل می‌شود؟

تمرین ۱۹.۵. به ازای چه مقدار a, b تابع $f(x) = ax^3 + (b - 1)x + 2$ به تابع ثابت صفر تبدیل می‌شود؟

تمرین ۲۰.۵. اگر $I = \{(1, a^2), (a + 1, b), (b^2, c - 2), (d^2, d + c)\}$ تابع همانی باشد d را بیابید.

تمرین ۲۱.۵. نمودار تابع $y = |x - 2|$ را در بازه‌ی $[-1, 5]$ رسم کرده و برد آن را بیابید.

تمرین ۲۲.۵. برد تابع $y = |x + 5| - 3$ را در هریک از حالات زیر رسم کرده و برد آن را بیابید.

$$D_f = [-4, 0] \quad (۴) \quad D_f = [-4, 10] - \{5\} \quad (۳) \quad D_f = [-6, 10] \quad (۲) \quad D_f = \mathbb{R} \quad (۱)$$

تمرین ۲۳.۵. نمودار توابع زیر را رسم کرده و برد هریک را مشخص کنید.

$$۱) f(x) = x^2 - 4$$

$$۲) f(x) = x^2 - x$$

$$۳) f(x) = 4x - x^2$$

$$۴) f(x) = -2x^2 + 8x - 3$$

$$۵) f(x) = |x^2 - 4x|$$

$$۶) f(x) = |x^3 - 1|$$

$$۷) f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$۸) f(x) = x^2 - 2|x|$$

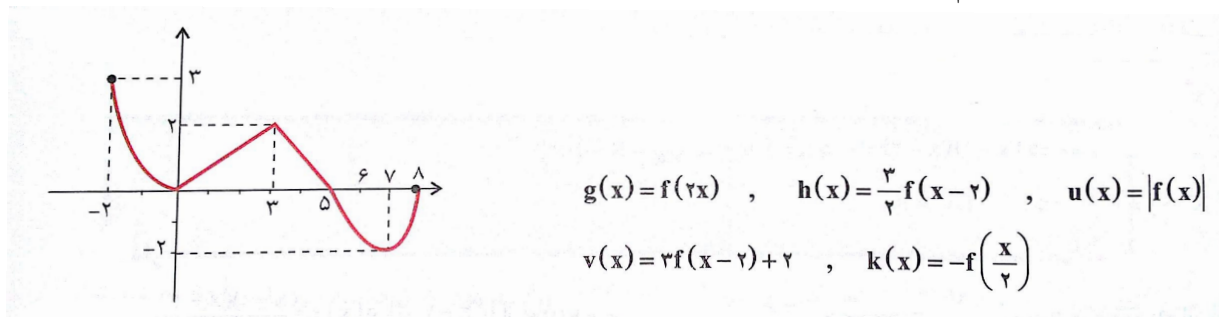
$$۹) f(x) = ||x| - 1|$$

$$۱۰) f(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

$$۱۱) f(x) = |x - 1| - |x + 1|$$

$$۱۲) f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$$

تمرین ۲۴.۵. نمودار تابع f بصورت مقابل است. دامنه و برد تابع را بیابید و توابع خواسته شده در زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را بدست آورید.



$$g(x) = f(2x) \quad , \quad h(x) = \frac{3}{4}f(x-2) \quad , \quad u(x) = |f(x)|$$

$$v(x) = 2f(x-2) + 2 \quad , \quad k(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$$

تمرین ۲۵.۵. نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$۱) |y| = x$$

$$۲) |y| = x + 2$$

$$۳) |y| = x^2 - 1$$

$$۴) |y - 1| = x$$

بیشتر بدانیم

۱. توابع گویا: به هر تابعی کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد، یک تابع گویا گوئیم. اگر دامنه تعریف چنین تابعی در تعریف تابع مشخص نشده باشد، باید بزرگترین مجموعه ممکن را به عنوان دامنه آن در نظر بگیریم. چنین تابعی در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند الا در جاهایی که مخرج صفر می‌شود. مثلاً تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$ دارای دامنه‌ای بصورت $D_f = \mathbb{R} - \{0, -2\}$ است.

۲. توابع یک به یک: برخی توابع دارای ویژگی‌های خاصی هستند. همان‌طور که می‌دانید هر عضو دامنه تنها به یک عضو هم‌دامنه نظیر می‌شود. با این حال ممکن است دو عضو دامنه به یک عضو هم‌دامنه نظیر شود. چنانچه این اتفاق برای تابعی چون f رخ ندهد یعنی هر عضو برد متناظر به یک و فقط یک عضو دامنه باشد تابع f را یک به یک گوئیم. به زبان ریاضی تعریف تابع یک به یک چنین است:

$$f(a) = f(b) \implies a = b \quad \longleftarrow \quad \text{تعریف تابع یک به یک}$$

به عنوان یک مثال ساده تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست چرا که $f(1) = f(-1) = 1$ است در حالی که $1 \neq -1$ است.

از طرفی تابع گویای $f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$ دارای دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ است و یک به یک است چرا که

داریم:

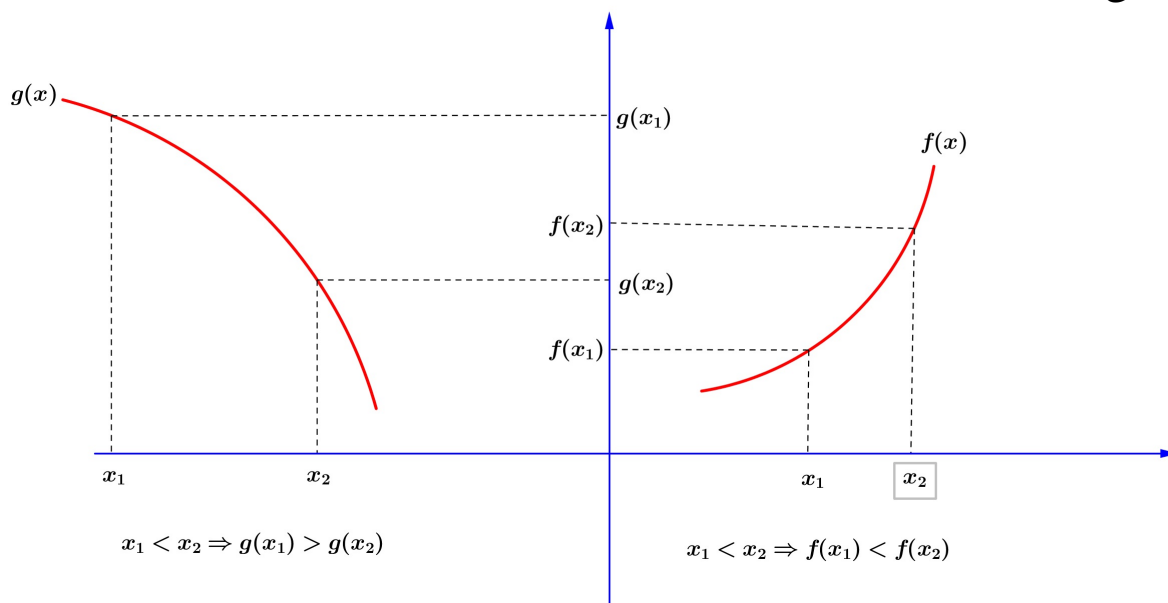
$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\iff \frac{2a-1}{3a-6} = \frac{2b-1}{3b-6} \\
 &\iff 6ab - 12a - 3b + 6 = 6ab - 3a - 12b + 6 \\
 &\iff 9a = 9b \\
 &\iff a = b
 \end{aligned}$$

۳. توابع پوشا: قبلاً دیدیم که برای هر تابع f همواره $R_f \subseteq B$ است که در آن $f: A \rightarrow B$ است. حال اگر داشته باشیم $R_f = B$ گوئیم تابع f پوشاست. پس پوشا بودن ارتباط زیادی با هم‌دامنه دارد. دو تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightarrow \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\sqrt{x} \geq 0$ است پس $R_f = R_g = [0, +\infty)$ است. حال $R_f \subsetneq \mathbb{R}$ است و $R_g = \mathbb{R}^+$ است. یعنی g پوشاست در حالیکه f پوشا نیست اگر چه ضابطه و دامنه هر دو تابع یکسان است.

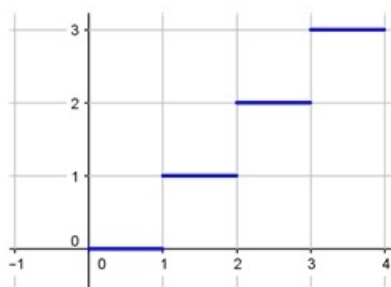
۴. توابع یکنوا: ابتدا به شکل زیر دقت کنید.



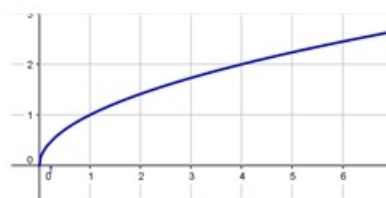
در شکل ۱ با افزایش مقدار x مقدار تابع یا همان $f(x)$ هم مرتباً افزایش می‌یابد. چنین تابعی را اکیدا صعودی گوئیم. در شکل ۲ اما داستان برعکس است. با افزایش x مقدار تابع یا $f(x)$ مرتباً کاهش می‌یابد. چنین تابعی را اکیدا نزولی گوئیم. چنانچه با افزایش تابع مقدار $f(x)$ کاهش نیابد، تابع را صعودی گوئیم و چنانچه با افزایش x مقدار تابع افزایش نیابد تابع را نزولی گوئیم.

تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد یکنوا گوئیم. تابعی که صعودی یا نزولی باشد را یکنوا

گوییم. در شکل زیر چند تابع با این ویژگی‌ها رسم شده‌اند.



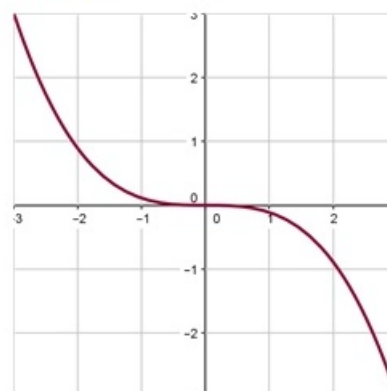
صعودی



اکیدا صعودی



نزولی



اکیدا نزولی

۵. یافتن دامنه توابع از روی ضابطه: گاهی اوقات دامنه یک تابع در زمان معرفی تابع معین نمی‌شود. در این حالت باید بزرگترین دامنه ممکن را به عنوان دامنه تابع در نظر گرفت. برای این منظور توجه به دو نکته ، اساسی است اول: توابعی که کسری هستند نباید مخرجشان صفر شود. دوم: توابع رادیکالی با فرجه زوج زمانی تعریف شده هستند که زیر رادیکال مثبت باشد. به مثال زیر دقت کنید: مثال. دامنه توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{۲ + x^۲}{x^۲ + x - ۲}$$

$$۲) g(x) = \frac{\sqrt{۹ - x^۲}}{x^۲ - ۴}$$

$$۳) h(x) = \sqrt[۳]{\frac{۲x}{x^۲ - ۱}}$$

$$۴) \ell(x) = \frac{۱}{\sqrt{۴ - ۳x - x^۲}}$$

فصل ۶

آنالیز ترکیبی

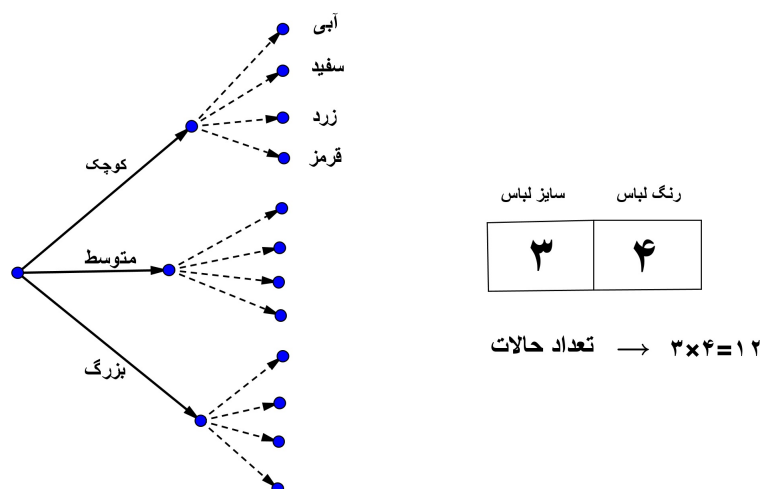
انسان قبل از اینکه نوشتن و خواندن بیاموزد با شمارش سروکار داشته است. در آنالیز ترکیبی یا ترکیبیات با شمارش سروکار داریم اما نه شمارش معمولی. در واقع شمارش در اینجا حالت تخصصی‌تری به خود می‌گیرد. حدود ۲۰۰ سال از عمر این شاخه از ریاضیات می‌گذرد و بیشترین پیشرفت ترکیبیات در ۵۰ تا ۶۰ سال گذشته شکل گرفته است. با پیدایش کامپیوتر و ساده شدن محاسبات طولانی به کمک آن، برخی مسائل که قبلاً حلشان دشوار می‌نمود. رابطه‌ی کامپیوتر و ترکیبیات رابطه‌ی دوسویه بوده است.^۱ خیلی از الگوریتم‌هایی که در کامپیوتر اجرا می‌شوند به مدد ترکیبیات نوشته شده‌اند. در این فصل ابتدا اصول مقدماتی شمارش را بیان کرده و جایگشت و ترکیب را در ادامه فصل بررسی می‌کنیم.

۱.۶ اصل ضرب و جمع

برای روشن شدن مطلب اجازه دهید مثالی ساده را بررسی کنیم.

^۱ در این زمینه قضیه چهاررنگ مثالی جالب است. قَضِیَةُ چهاررنگ یا حدس چهاررنگ از مسائل مشهور و قدیمی ریاضیات است که سال‌ها اثبات نشده مانده بود. به بیان ساده (و نادقیق) این قضیه می‌گوید: «برای رنگ کردن هر نقشه به طوری که کشورها و نواحی همسایه در نقشه هم‌رنگ نباشند فقط چهار رنگ کافی است». سه رنگ برای نقشه‌های ساده تر کفایت ولی یک رنگ چهارم اضافی برای برخی نقشه‌ها لازم است. قضیه ۵ رنگ که اثباتی کوتاه و ابتدایی دارد، بیان می‌کند که ۵ رنگ برای رنگ آمیزی نقشه کفایت. این قضیه در اواخر قرن ۱۹ اثبات شده است (هیوو ۱۸۹۰). اثبات اینکه ۴ رنگ کفایت بسیار سخت تر است. این مسئله به صورت معادله ابتدا در سال ۱۸۵۲ عنوان شد و سرانجام در سال ۱۹۷۶ با کمک رایانه توسط کنت اپل و ولفگانگ هیکن حل شد. این اولین قضیه مهمی بود که با استفاده از کامپیوتر به اثبات رسید. آنها نشان دادند که مجموعه‌ای از ۱۹۳۶ نقشه وجود دارد که هیچ کدام از آنها نمی‌توانند قسمتی از یکی از کوچکترین مثال نقض های قضیه چهار رنگ باشند. اپل و هیکن از یک برنامه کامپیوتری خاص استفاده کردند تا ثابت کنند هیچ کدام از این نقشه‌ها از این قاعده مستثنی نیستند. علاوه بر این هر نقشه‌ای فارغ از این که مثال نقض هست یا نه، حتماً قسمتی را شامل می‌شود که شبیه یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه می‌باشد و اثبات این نیاز به صدها صفحه تحلیل دست نویس بود. اپل و هیکن نتیجه گرفتند که اگر بخواهد کوچکترین مثال نقضی وجود داشته باشد باید شامل یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه باشد. این تناقض به این معنی بود که هیچ مثال نقضی وجود ندارد و قضیه درست می‌باشد. در ابتدا اثبات آنها از طرف همه ریاضیدان‌ها مورد تایید واقع نشد، چرا که چک کردن یک اثبات کامپیوتری توسط انسان امکان پذیر نبود.

مثال ۱.۶. یک شرکت تولید پوشاک ورزشی لباس‌های ورزشی را در ۳ اندازه، کوچک، متوسط و بزرگ و در ۴ رنگ سفید، قرمز، آبی و زرد تولید می‌کند. این تولیدی در مجموع چند نوع لباس متفاوت تولید می‌کند؟



در شکل بالا می‌توان با شمارش مستقیم تعداد لباس‌های تولیدی را یافت. راه دیگر شمارش حرفه‌ای است. دویخانه به هم چسبیده را که یکی مربوط به اندازه و دیگری مربوط به رنگ می‌باشد رسم می‌کنیم. در خانه اولی سه امکان (سه سایز) و در دومی ۴ انتخاب (۴ رنگ) وجود دارد و تعداد کل انتخاب‌ها برابر ۱۲ است.

اصل ضرب: فرض کنید کاری به دو جزء تقسیم شده است، چنانکه جز اول به m طریق انجام شدنی است و جزء دوم مستقل از اولی به n طریق انجام شدنی است. در این صورت این کار به mn طریق انجام شدنی است. البته این اصل قابل تعمیم است. اگر کاری به k طریق مجزا تقسیم شده باشد بطوریکه اولی به m_1 طریق انجام شدنی باشد، دومی به m_2 طریق انجام شدنی باشد و... و k امی به m_k طریق انجام شدنی باشد آنگاه کل کار به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق شدنی است.

مثال ۲.۶. از شهر A به شهر B سه راه و از شهر B به شهر C چهارراه وجود دارد.
الف: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر C رفت؟ به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟
ب: به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و به شهر A برگشت، بطوریکه هر جاده حداکثر یک بار طی شود؟

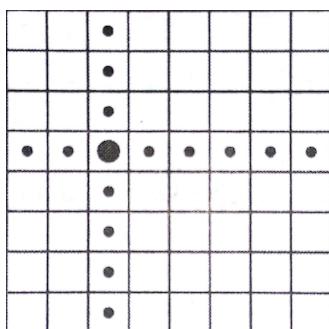
مثال ۳.۶. به چند طریق می‌توان یک کمیته دو نفره از بین ۸ مرد و ۹ زن تشکیل داد؟

مثال ۴.۶. از بین ده زوج (زن و شوهر) چگونه می‌توان یک گروه دونفره تشکیل داد که یک مرد و یک زن در آن باشد و در عین حال این دو زن و شوهر نباشند؟

مثال ۵.۶. چند کلمه سه حرفی با حروف e, d, c, b, a می‌توان ساخت؟ در چند کلمه مجاور متمایزند؟ در چند کلمه هر سه حرف متمایزند؟

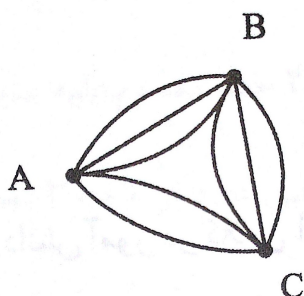
مثال ۶.۶. چند عدد فرد سه رقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۷.۶. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ مشکی را در یک صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که یکدیگر را تهدید نکنند؟ (رخ همان قلعه است و صرفاً افقی و عمودی حرکت می‌کند).



اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به دو روش انجام داد طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب موجود باشد. در این صورت برای انجام این کار $m + n$ روش وجود دارد. مثل اصل ضرب این اصل نیز قابل تعمیم است.

مثال ۸.۶. بین شهرهای A, B سه جاده، بین A, C ۲ جاده و بین B, C سه جاده احداث شده است. به چند طریق می‌توان با طی حداکثر دو جاده از A به B رفت؟



مثال ۹.۶. کمیسیون ورزش ۸ عضو و کمیسیون اقتصاد ۱۲ عضو دارد که ۳ عضو آنها مشترک است. می‌خواهیم از بین اعضای هر کمیسیون یک نفر را به عنوان نماینده‌ی کمیسیون انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم به طوری‌که نمایندگان دو کمیسیون دو فرد مختلف باشند؟

مثال ۱۰.۶. با استفاده از ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند عدد طبیعی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

مثال ۱۱.۶. چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز وجود دارد؟

مثال ۱۲.۶. روی تخته سیاه تمام کلمات سه حرفی با استفاده از حروف a, b, c, d, e نوشته‌ایم. چندبار حرف a روی تخته سیاه نوشته شده است؟

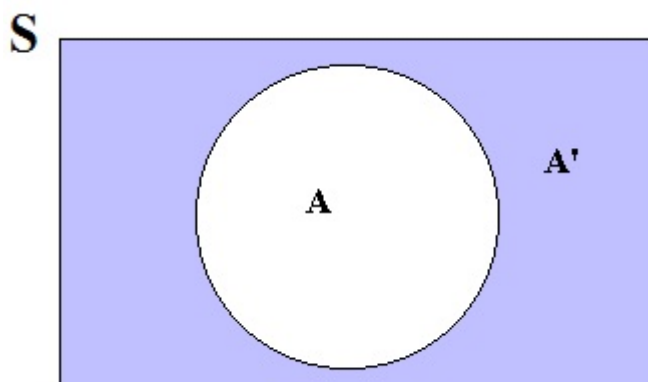
مثال ۱۳.۶. با ارقام $\{0, 2, 3, 7\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که:
الف: تمام ارقام متمایز باشند.

ب: عدد سه رقمی و فرد با ارقام متمایز باشد.

ج: عدد زوج و سه رقمی با ارقام متمایز باشد.

مثال ۱۴.۶. در چند عدد ۴ رقمی رقم ۵ وجود دارد؟

تذکر مهم: تکنیک به کار رفته در حل مسئله فوق، استفاده از اصل متمم است. گاهی اوقات شمارش خاصیت ذکر شده در مسئله‌ای به مراتب مشکل‌تر از شمارش اعضای است که خاصیت ذکر شده را ندارند. در این حالت بهتر است آنهایی که آن ویژگی معین را ندارند (متمم) شمارش شده و از کل اعضای مجموعه اصلی کم شوند.



$$|S| = |A| + |A'|$$

مثال ۱۵.۶. در چند کلمه ۴ حرفی با حروف f, e, d, c, b, a حرف تکراری وجود دارد؟

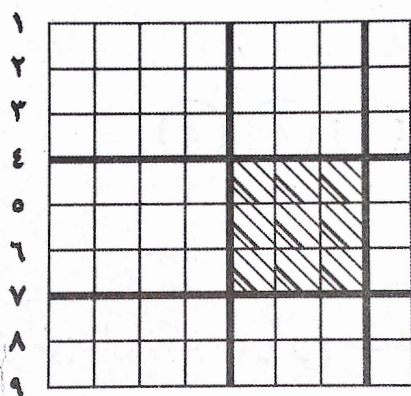
مثال ۱۶.۶. در چند عدد ۴ رقمی بزرگترین رقم برابر ۶ است؟

تمرین ۱.۶. به چند طریق می‌توان یک نفر را از بین ۶ زن و ۸ مرد انتخاب کرد؟

تمرین ۲.۶. به چند طریق می‌توان ۲ نفر را از بین ۵ کلاس اولی، ۷ کلاس دومی و ۶ کلاس سومی انتخاب کرد بطوریکه این دو نفر هم کلاس نباشند؟

تمرین ۳.۶. چند عدد فرد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد؟

تمرین ۴.۶. چند مربع 3×3 در یک صفحه شطرنجی 8×8 وجود دارد؟



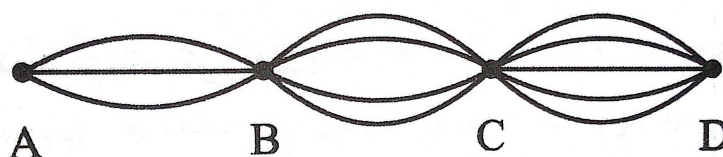
تمرین ۵.۶. الف: به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

ب: به چند طریق می‌توان ۳ مهره‌ی متمایز را در سه خانه از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد بطوری‌که هیچ دوتایی در یک سطر یا ستون قرار نگیرند؟

تمرین ۶.۶. الف: با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

ب: به چند طریق می‌توان از A به D رفت و به A برگشت؟

ج: در چند مسیر از مسیرهای قسمت «ب» هر جاده حداکثر یک بار طی شده است؟



تمرین ۷.۶. دو خانه از خانه‌های شطرنج را مجاور گوئیم هرگاه حداقل یک راس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان یک مهره سفید و یک مهره سیاه را در دو خانه مجاور از صفحه شطرنجی 8×8 قرار داد؟

تمرین ۸.۶. در چند عدد ۵ رقمی حداقل یکی از دو رقم ۱ و ۲ وجود دارد؟

تمرین ۹.۶. در چند عدد ۶ رقمی، رقم تکراری وجود ندارد؟

تمرین ۱۰.۶. چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل دو عضو دارند؟

۲.۶ جایگشت

سه نفر به چند صورت متفاوت می‌توانند در یک ردیف کنار هم ایستاده و عکس بگیرند؟ اگر این سه شخص را با حروف لاتین a, b, c نمایش دهیم، تمام حالات ممکنه در زیر آمده است:

$$abc, acb, bca, bac, cab, aba$$

هر یک از این ۶ حالت را یک جایگشت از سه حرف $\{a, b, c\}$ گوئیم. حال اگر ۴ نفر بخواهند در یک ردیف و کنار هم عکس بگیرند چند حالت متفاوت پدید می‌آید؟

$$abcd, abdc, acbd, acdb, adcb, adbc$$

$$bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$$

$cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$

$dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$

به کمک اصل ضرب می‌توان تعداد جایگشت‌ها را بدون رسم کردن بدست آورد. تعداد جایگشت‌های ۴ شیء برابر است با $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و تعداد جایگشت‌های ۳ شیء برابر است با $6 = 3 \times 2 \times 1$. در حالت کلی اگر n شیء متمایز داشته باشیم در این صورت تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

معرفی یک نماد: حاصلضرب $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$ را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و n فاکتوریل خوانده می‌شود.

مثال ۱۷.۶. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

۱) $\frac{8!}{5!}$

۲) $\frac{10!}{8!2!}$

۳) $\frac{7!4!}{10!} \left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right)$

۴) $\frac{n!}{(n-2)!}$

۵) $\frac{n!}{(n-3)!}$

۶) $\frac{n!}{(n-k)!}$

۷) $\frac{5!}{m(m+1)} \times \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$

۸) $\frac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \frac{1}{6} \rightarrow m = ?$

مثال ۱۸.۶. الف: ثابت کنید $20! = 19!(19 + 1)$. ب: عبارت $24 \times 9 \times 8 \times \dots$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. ج: عبارت $40 \times 6000 \times 4 \times 2$ را به نماد فاکتوریل بنویسید. د: عبارت $39 \times 5000 \times 3 \times 1$ را به نماد فاکتوریل بنویسید.

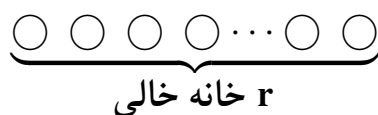
حال تصور کنید هفت شیء متمایز $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6, a_7$ داشته باشیم. می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های بطول ۳ (یعنی با سه شیء) را که می‌توان از ۷ شیء فوق ساخت محاسبه کنیم. یک جایگشت بطول ۳ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

○ ○ ○

اولین خانه به هفت طریق، دومین خانه به ۶ طریق و سومین خانه به ۵ طریق پر می‌شود. پس طبق اصل ضرب تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر $5 \times 6 \times 7$ است. می‌توان این عبارت را طور دیگری هم نوشت:

$$7 \times 6 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4!}{4!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

عدد ۳ و ۷ که نقشی اصلی در مسئله داشتند را در آخرین کسر می‌بینیم. در حالت کلی اگر $r \leq n$ باشد و بخواهیم تعداد جایگشت های r شیء را از n شیء بیابیم همانند مثال بالا عمل می‌کنیم:



اولین خانه دارای n انتخاب، دومین خانه $(n - ۱)$ انتخاب، سومین خانه $(n - ۲)$ انتخاب و... و r امین خانه دارای $(n - r + ۱)$ انتخاب است. حال حاصلضرب این اعداد برابر است با:

$$n(n - ۱)(n - ۲) \cdots (n - r + ۱) = \frac{n!}{(n - r)!} = p(n, r)$$

عبارت $p(n, r)$ را برای تعداد جایگشت های r شیء از n شیء انتخاب کرده‌ایم. پس تعداد جایگشت های r شیء از n شیء یا $p(n, r)$ برابر است با :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

مثال ۱۹.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *table* با حرف t شروع می‌شود؟

مثال ۲۰.۶. چند جایگشت از حروف کلمه *nature* به حروف صدادار ختم می‌شوند؟

مثال ۲۱.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *logarithm* عبارت *log* وجود دارد؟

مثال ۲۲.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادار مجاورند؟ در چند جایگشت ۵ حرفی با استفاده از حروف این کلمه حرف اول بی‌صدا است؟

مثال ۲۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *flexicam* هیچ دو حرف صداداری مجاور نیستند؟

مثال ۲۴.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *talking* بین دو حرف k, t دقیقاً دو حرف قرار دارد؟

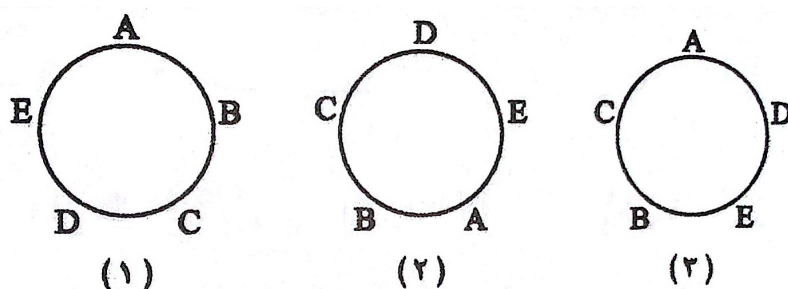
مثال ۲۵.۶. ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند به طوری که هیچ دو معلمی مجاور یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۶.۶. با حروف کلمه جهانگردی و بدون تکرار حروف:

۱. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به «ی» ختم می‌شود؟
۲. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار گرفته باشند؟
۳. چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟
۴. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» ۴ حرف اول باشند؟
۵. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
۶. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شوند؟

جایگشت‌های دوری

به هر روش قرار گرفتن n شیء دور یک دایره یک جایگشت دوری آن n شیء گوئیم، با این ویژگی که اگر یک آرایش از دوران یک آرایش دیگر بدست آید این دو آرایش را هم‌ارز گوئیم. در شکل زیر آرایش‌های ۱ و ۲ از جایگشت‌های دوری E, D, E, B, A هم‌ارزند اما این دو با ۳ هم‌ارز نیست.



قضیه: تعداد جایگشت‌های دوری n شیء برابر است با $(n-1)!$.

مثال ۲۷.۶. در چند جایگشت دوری از حروف کلمه‌ی *triangle* حروف صدادر مجاورند؟

مثال ۲۸.۶. سه معلم و هشت دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند بطوریکه هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

مثال ۲۹.۶. پنج زوج به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند بطوریکه هر فرد کنار همسر خود نشسته باشد؟

تمرین ۱۱.۶. ۶ دکتر و ۵ مهندس را در نظر بگیرید.

۱. به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند؟

۲. در چند حالت دکترها مجاور هدیگرند؟

۳. در چند حالت هیچ دو دکتری مجاور یکدیگر نیستند؟

۴. در چند حالت هم دکترها مجاورند و هم مهندسين؟

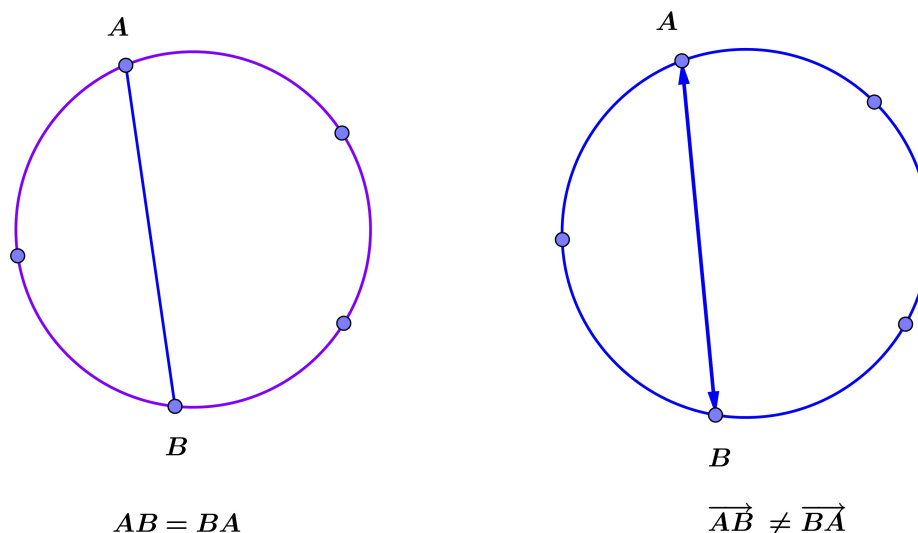
تمرین ۱۲.۶. ۱۱ مرد و ۱۴ زن به چند طریق می‌توانند تشکیل ۱۱ زوج بدهند؟

تمرین ۱۳.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه *triangle* حرف t قبل از حرف n قرار دارد؟

تمرین ۱۴.۶. چند جایگشت دوری شامل ۶ حرف از حروف کلمه‌ی *Logarithm* وجود دارد؟ در چندتا از این جایگشت‌ها حرف t وجود دارد؟ در چندتا هر سه حرف صدادر وجود دارد؟ در چندتا حداقل یکی از حروف m ، t وجود دارد؟

۳.۶ ترکیب

به دقت به شکل زیر نگاه کنید.



پنج نقطه روی دایره انتخاب شده‌اند. با این پنج نقطه ده پاره خط متمایز چون AB می‌توان ساخت، اما دو برابر این تعداد یعنی 20 بردار چون $\overrightarrow{AB}$ می‌توان رسم کرد. در واقع $P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = 20$. در این دو مسئله به ظاهر یکسان ترتیب انتخاب بسیار تاثیرگذار است. در انتخاب پاره خط ما با انتخاب هر دو نقطه از بین این ۵ نقطه روی محیط دایره یک پاره خط داریم و این مانند انتخاب زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه ۵ عضوی است که مثلاً مجموعه‌های $\{A, B\}$ ، $\{B, A\}$ یکی هستند. اگر در انتخاب r شیء از میان n شیء $r \leq n$ ترتیب انتخاب مهم نباشد با مسئله ترکیب روبرو هستیم. تعداد راه‌های انتخاب r شیء بدون اهمیت ترتیب آنها را ترکیب r شیء از n شیء گوئیم و با نماد $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۳۰.۶. به چند طریق می‌توان از بین ده عضو شورای شهر دو نفر را به عنوان رئیس و معاون انتخاب کرد؟

مثال ۳۱.۶. یک هفت ضلعی منتظم مفروض است. تمام قطرهایش را رسم کرده ایم. کلاً چند قطر رسم شده است؟ اگر بدانیم هیچ سه قطری در یک نقطه متقاطع نیستند، تعداد محل‌های برخورد این قطرها را بیابید.

مثال ۳۲.۶. شانزده تیم فوتبال بصورت دوره‌ای باهم بازی می‌کنند. کلاً چند بازی در این دوره انجام می‌شود؟

مثال ۳۳.۶. به ازای کدام مقدار n داریم: $\binom{n}{2} = 21$.

مثال ۳۴.۶. ثابت کنید: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال ۳۵.۶. به کمک مثال بالا ثابت کنید :

الف: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $n - r$ عضوی برابر است.

ب:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ج: اتحاد پاسکال
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

مثال ۳۶.۶. از بین شش کتاب مفروض :

۱. به چند طریق می‌توان ۴ تا را در یک قفسه کنار هم چید؟

۲. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب به یک کتابخانه هدیه داد؟

برای جمع بندی تمام مطالب فصل مثال‌های متنوع زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۷.۶. پنج ماشین پژو و سه ماشین بنز به چند طریق در یک ردیف می‌توانند کنار هم پارک کنند که

ماشین‌های بنز کنار هم و ماشین‌های پژو هم کنار هم باشند؟

مثال ۳۸.۶. چند عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز با استفاده از ارقام مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ می‌توان

ساخت بطوری‌که دو عدد مضرب ۳ همواره کنار هم باشند؟

مثال ۳۹.۶. مجموعه ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مفروض است. چند عدد ۸ رقمی با ارقام متمایز با

استفاده از این ارقام می‌توان نوشت بطوری‌که هیچ دو عدد فرد اول این مجموعه کنار هم نباشند؟

مثال ۴۰.۶. یک پلاک ماشین بصورت شکل زیر است. ارقامی که درست راست پلاک استفاده می‌شود از

مجموعه $\{99, 00, 22, 11\}$ است. ارقام سمت چپ از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب می‌شود

و حروف بین ارقام سمت چپ تنها ۱۳ حرف از حروف الفبای فارسی است. معین کنید به این ترتیب چند

پلاک ماشین می‌توان ساخت؟



مثال ۴۱.۶. تعداد کلماتی یازده حرفی که با حروف کلمه‌ی *Mississippi* می‌توان نوشت را بیابید.

مثال ۴۲.۶. چند کلمه ده حرفی با حروف a, b, c می‌توان ساخت بطوریکه دقیقاً شامل سه حرف a باشد؟

جایگشت با تکرار

اگر مثال ۴۱ را با دقت بیشتری بررسی کنید و ترکیب‌های در راه حل را به فاکتوریل تبدیل کنید به نتیجه‌ی جالبی بین تعداد اشیاء تکراری و تعداد کل و جواب مسئله می‌رسید. اثبات این مطلب در حالت کلی هم چندان مشکل نیست. فرض کنید m_1 شیء از نوع a_1 و m_2 شیء از نوع a_2 و ... و m_k شیء از نوع a_k داریم که $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. در اینصورت هر چیدن این n شیء را یک جایگشت با تکرار می‌نامیم. تعداد این جایگشت‌ها برابر است با :

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

با این حساب در مثال ۴۱ می‌توان تعداد جواب‌ها را از دستور یافت که برابر است با : $\frac{11!}{1! 4! 4! 2!}$.

مثال ۴۳.۶. چند عدد ده رقمی با استفاده از سه رقم ۴ و دو رقم ۲ و پنج رقم ۸ می‌توان نوشت؟

تمرین ۱۵.۶. ده نقطه روی محیط یک دایره داده شده است. کلیه‌ی وترهای بین دودوی این نقاط را رسم می‌کنیم.

الف: چند وتر رسم شده است؟

ب: تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آنها روی محیط دایره و اضلاع آنها روی وترهای رسم شده باشد.

تمرین ۱۶.۶. به چند طریق می‌توان ۷ کتاب یکسان را بین ده نفر توزیع کرد بطوریکه به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

تمرین ۱۷.۶. در چند زیر مجموعه ۵ عضوی از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل سه عدد فرد وجود دارد؟

تمرین ۱۸.۶. مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ مفروض است.

۱. مجموعه A چند زیرمجموعه ۸ عضوی دارد؟

۲. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود دارند؟

۳. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی هیچ یک از اعداد ۱، ۲ و ۳ وجود ندارند؟

۴. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل یکی از اعضای $\{1, 2, 3\}$ وجود دارند؟

۵. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی، عددی بزرگتر از ۱۵ وجود دارد؟

۶. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین ۱۵ است؟

۷. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی اختلاف بزرگترین عضو از کوچکترین عضو برابر ۱۰ است؟

۸. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۶ عدد فرد وجود دارد؟

۹. در چند زیرمجموعه ۸ عضوی حداقل ۳ عدد فرد و حداقل ۳ عدد زوج وجود دارد؟

تمرین ۱۹.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی Gallery حروف l غیرمجاورند؟

تمرین ۲۰.۶. در یک جمع ۹ زوج (زن و شوهر) حضور دارند. به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر از این جمع انتخاب کرد طوری که در بین آنها دقیقاً ۳ زوج حضور داشته باشند؟

تمرین ۲۱.۶. در یک کلاس ۳۰ دانش‌آموز وجود دارد. می‌خواهیم ۶ نفر از این دانش‌آموزان را برای تیم والیبال و ۸ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم بطوری که تمام اعضای تیم والیبال از اعضای تیم فوتبال بلندتر باشد. به چند طریق این کار شدنی است؟

تمرین ۲۲.۶. در یک صفحه شطرنجی 6×4 چند مستطیل دیده می‌شود؟

تمرین ۲۳.۶. در چند عدد ۸ رقمی با ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ دقیقاً ۵ رقم فرد وجود دارد؟

تمرین ۲۴.۶. در چند جایگشت ۶ حرفی از حروف کلمه‌ی *logarithm* دقیقاً دو حرف صدادار وجود دارد؟

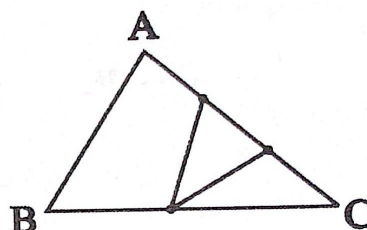
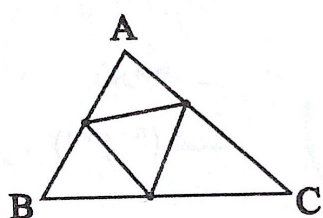
تمرین ۲۵.۶. در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی *computers* حروف صدادار به ترتیب الفبایی وجود دارند و همچنین حرف *p* جلوتر از حرف *c* قرار دارد؟

تمرین ۲۶.۶. در چند کلمه‌ی ده حرفی با حروف *a, b, c* سومین حرف *a* در مکان هفتم کلمه آمده است؟

تمرین ۲۷.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره *A, B* تقسیم کرد؟

تمرین ۲۸.۶. ده نفر را به چند طریق می‌توان به دو تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟

تمرین ۲۹.۶. روی هر ضلع مثلث *ABC* پنج نقطه را علامت گذاشته‌ایم. چند مثلث وجود دارد که رئوس هریک متعلق به این ۱۵ نقطه باشد؟



۴.۶ تست‌های فصل ششم

۱- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که ابتدا کتابهای علمی یک در میان قرار گیرند؟

(۱) ۱۴۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۶ (۴) ۷۲

۲- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آنها تکرار نشده باشد؟

(۱) $\frac{8!}{5!3!}$ (۲) $\frac{8!}{5!}$ (۳) $\frac{8!}{3!}$ (۴) $8!$

۳- با چهار رقم ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۴- مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۵- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C, D رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟

(۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۵

۶- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می‌توان نوشت؟

(۱) ۹ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۷- از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم این عمل به چند طریق ممکن است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۵۰ (۳) ۳۳۰ (۴) ۴۲۰

۸- دانش‌آموزی باید به ۱۸ سوال از ۲۰ سوال امتحان به دلخواه پاسخ دهد. به چند طریق می‌تواند این ۱۸ سوال را انتخاب کند؟

(۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۹۰ (۴) ۳۸۰

۹- با چهار عدد ۰، ۹، ۶، ۵ چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) می‌توان ساخت؟

(۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۱۰- با ارقام ۰، ۴، ۵، ۱ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۱۱- شخصی از میان ۱۰ کتاب خود می‌خواهد دو کتاب را انتخاب نموده و به یکی از دوستانش هدیه کند چند صورت ممکن است؟

۴۰ (۱) ۴۵ (۲) ۹۰ (۳) ۲۰ (۴)

۱۲- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۴۰ (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۱۳- سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوتند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

۲۴ (۱) ۱۶ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴)

۱۴- مجموعه اعداد چهار رقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ بدون تکرار رقم می‌توان نوشت، چند عضو دارد؟

۲۴۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۲۸۰ (۳) ۳۰۰ (۴)

۱۵- یک مجموعه ۸ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

۸۴ (۱) ۷۰ (۲) ۵۶ (۳) ۴۲ (۴)

۱۶- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

$(11)_4 \times 3! \times 2$ (۱) $(11)_4 \times 3! \times 2$ (۲) $(6)_4 \times 3! \times 2$ (۳) $(6)_4 \times 3! \times 2$ (۴)

۱۷- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱۲ (۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۳ (۳) ۱۳/۵ (۴)

۱۸- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه‌دار نباشد؟

۱۰۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴)

۱۹- مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

$n(n+1)$ (۱) $n(n-1)$ (۲) $\frac{n+1}{n-1}$ (۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ (۴)

۲۰- حروف کلمه ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۲۱- بر روی یک دایره ۸ نقطه متمایز وجود دارد، تعداد چهار ضلعیهای محدب که هر رأس یک چهار ضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، کدام است؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۶۸ (۳) ۷۰ (۴) ۷۲

۲۲- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می توان سه نفر طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر، بین آن سه نفر باشد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۵ (۳) ۶۶ (۴) ۷۲

۲۳- از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می توان انتخاب کرد؟

- (۱) ۴۵۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۲۴۰ (۴) ۴۲۰

تهران
۲۴- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت $***ب**$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است.

در سری ب و در تهران چند پلاک می توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

- (۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۱۴۵۸۰ (۳) ۱۵۴۸۰ (۴) ۱۸۲۲۵

۲۵- یک مجموعه ی n عضوی، ۵۵ زیر مجموعه ی $n - ۲$ عضوی دارد، n کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۲۶- ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸

۲۷- ۴ دانش آموز کلاس اول و ۵ دانش آموز دوم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

- (۱) $۴! \times ۵!$ (۲) $۴! \times ۵! \times ۲$ (۳) $۴! \times ۵! \times ۳$ (۴) $۴! \times ۵! \times ۳!$

۲۸- ۵ نقطه متمایز بر روی محیط یک دایره قرار دارند. تعداد چندضلعی هایی که رئوس آنها بر این نقاط قرار دارند، کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲۰

۲۹- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۰ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۳۰- اگر $C(n, ۲) - P(n, ۲) = ۳۶$ باشد، حاصل $C(n, ۳)$ چیست؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۳۱- به چند طریق از میان ۵ آقا و ۴ خانم می توان شورایی متشکل از ۲ آقا و ۳ خانم انتخاب نمود؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۳۲- ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۳ کتاب فیزیک مختلف داریم، به چند طریق می توانیم آنها را در یک ردیف قرار دهیم به نحوی که کتابهای ریاضی در کنار هم باشند؟

(۱) $2 \times 3! \times 4!$ (۲) $(4!)^2$ (۳) $3! \times 4!$ (۴) $2 \times 4! \times 4!$

۳۳- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟
 (۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۳۴- می خواهیم از یک کلاس ۱۰ نفری شامل A و B چهار نفر برای شرکت در یک مسابقه ورزشی انتخاب کنیم به طوریکه شخص A حتماً انتخاب نشود ولی شخص B حتماً انتخاب شده باشد. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

(۱) ۱۸۶ (۲) ۲۸ (۳) ۵۶ (۴) ۸۴

۳۵- اگر $\binom{n}{K+1} = A$, $\binom{n}{K} = B$ حاصل $\binom{n}{K+1}$ برابر است با :

(۱) $A + B$ (۲) $A - B$ (۳) $nA - B$ (۴) $A + nB$

۳۶- اگر یک مجموعه n عضوی دارای ۱۰ زیر مجموعه ۲ عضوی باشد، دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۵ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۳۷- تعداد اعداد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۵ کدام است؟

(۱) ۲۸۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۱۹۲ (۴) ۱۴۴

۳۸- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟

(۱) ۲۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۷۲

۳۹- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت هر گاه بر ۵ بخش پذیر بوده و از نیز ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۰- حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت های مختلف کنار هم قرار می دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

(۱) ۳۶۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۴۱- با فرض آنکه $P(n, 2) = \binom{n}{2}$ عدد طبیعی n کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴)

۴۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر است. تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن چندتاست؟

- ۲۱ (۱) ۴۲ (۲) ۲۴ (۳) ۱۸ (۴)

۴۳- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، چند زیرمجموعه‌های ۳ عضوی دارد که شامل ۱ باشد اما ۲ را نداشته باشد؟

- ۱۲ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴)

۴۴- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چه تعداد عدد ۳ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۶۰ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۳۲ (۴)

۴۵- از بین ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سفید می‌خواهیم ۳ مهره را انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و مهره دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

- ۶۰ (۱) ۷۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

۴۶- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ وجود دارد که در آن‌ها رقم ۳ حداقل یک بار ظاهر شود؟

- ۱۷۳۲ (۱) ۸۶۶ (۲) ۲۱۰۱ (۳) ۱۸۰۲ (۴)

۴۷- از میان هفت پرستار مرد و پنج پرستار زن به چند طریق می‌توان ۲ پرستار مرد و ۳ پرستار زن انتخاب نمود؟

- ۱۴۴ (۱) ۱۶۹ (۲) ۱۸۲ (۳) ۲۱۰ (۴)

۴۸- در مجموعه‌ای با افزایش ۳ عضو تعداد زیرمجموعه‌ها ۱۱۲ واحد اضافه می‌شود. در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی چند واحد افزایش می‌یابد؟

- ۲۷ (۱) ۴۲ (۲) ۳۵ (۳) ۳۱ (۴)

۴۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عدد زوج می‌توان نوشت؟

- ۷۲۹ (۱) ۱۶۲ (۲) ۴۸۶ (۳) ۳۲۴ (۴)

۵۰- حاصل $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (۲) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$
(۳) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3}$ (۴) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

۵۱- اگر بخواهیم ۴ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم را در یک ردیف کنار هم بنشانیم، در چند حالت دانش آموزان کلاس دوم کنار هم هستند؟

- (۱) ۳!۵! (۲) ۳!۴! (۳) ۴!۴! (۴) ۴!۵!

۵۲- با حروف کلمه‌ی «ایرانیان» چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

- (۱) ۱۶۸۰ (۲) ۳۳۶۰ (۳) ۴۰۳۲۰ (۴) ۶۷۲۰

۵۳- ۱۰ نقطه‌ی متمایز بر روی محیط یک دایره قرار گرفته‌اند. تعداد چهار ضلعی‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ده نقطه قرار دارد، چه تعداد از مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها بر این ۱۰ نقطه قرار دارد بیشتر است؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۱۰ (۴) ۹۰

۵۴- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۵۵- به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر دانش‌آموز کلاس اول و ۴ نفر دانش‌آموز کلاس دوم، ۴ نفر که حداقل ۳ نفر در آن‌ها کلاس دومی باشند انتخاب کرد و به آن‌ها ۴ جایزه مختلف اهداء نمود؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۰۴

۵۶- با ده، نقطه‌ی A, B, ..., J، که روی یک دایره قرار دارند، چند مثلث می‌توان ساخت که شامل راس G باشند؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۱۲

۵۷- اگر داشته باشیم $n! = 2^7 \times 3^2 \times 5$ مقدار $\binom{n}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۶ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

۵۸- پنج نفر قرار است در یک سمینار سخنرانی کنند. اگر ترتیب آن‌ها مهم باشد، به چند طریق ممکن است که شخص A پیش از شخص B سخنرانی کند؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۲۰

۵۹- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که ۲ رقم زوج کنار هم باشند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

۶۰- حاصل $\binom{17}{4} + \binom{17}{5}$ کدام است؟

- (۱) $\binom{18}{4}$ (۲) $\binom{18}{5}$ (۳) $\binom{17}{6}$ (۴) $\binom{17}{9}$

۶۱- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد و یکان آن ۶ نباشد؟

۳۱۲ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۱۲ (۳) ۲۸۰ (۴)

۶۲- در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

۶۳- با ارقام ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ چند عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می‌توان نوشت؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۶۴- از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به طوری که لااقل دو نفر آنان دانش‌آموز تجربی باشند؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

۶۵- از هریک از مدارس A و B و C و D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱۶۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۶۴۰ (۴)

۶۶- از هریک از ۶ منطقه‌ی کشوری، ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب کرد؟

۵۷۶۰۰ (۱) ۶۷۵۰۰ (۲) ۷۵۶۰۰ (۳) ۷۶۵۰۰ (۴)

۶۷- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۶۸- از هر یک از ۸ مدرسه علاقه‌مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود. به طوری که هر دو نفر همیار هم، از یک مدرسه باشند؟

۴۲۰۰ (۱) ۵۴۰۰ (۲) ۵۶۰۰ (۳) ۶۳۰۰ (۴)

۶۹- با حروف کلمه‌ی جمهوری چند کلمه‌ی سه حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۲۰ (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

۷۰- چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز و فرد که بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشد، وجود دارد؟

۲۴ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۹۶ (۴)

۷۱- دو سرباز و دو افسر به چند طریق می‌توانند کنار هم بایستند به طوری که دو افسر کنار هم نباشند؟

۶ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

۷۲- از بین ۵ جفت کفش به چند طریق می توان ۳ لنگه انتخاب کرد که یک جفت در میان آنها باشد؟
 (۱) ۴۰ (۲) ۵۶ (۳) ۹۶ (۴) ۱۲۸

۷۳- چند عدد ۳ رقمی بیش تر از ۵۰۰ با ارقام ۲، ۴، ۶ و ۸ وجود دارد؟ (تکرار با ارقام مجاز است).
 (۱) ۳۲ (۲) ۶۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۲۵۰

۷۴- حروف کلمه ی PANAMA را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد که هر ۳ حرف A مجاور باشند؟
 (۱) ۳! (۲) ۳! ۳! (۳) ۴! (۴) ۴! ۳!

۷۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت به طوری که ارقام فرد یکی در میان باشند؟
 (۱) ۷! (۲) ۳! ۴! (۳) ۴! (۴) ۴! ۳!

۷۶- از هر یک از تیم های ملی فوتبال، والیبال، بسکتبال و هندبال، ۵ نفر به جلسه ای دعوت شده اند. به چند طریق می توان ۳ نفر که دو به دو هم تیمی نباشند، انتخاب کرد؟
 (۱) ۳۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۶۰۰

۷۷- چند عدد چهار رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد که از ۴۰۰۰ کم تر و فرد باشند؟
 (۱) ۱۲۰۰ (۲) ۱۲۱۵ (۳) ۱۶۲۰ (۴) ۱۵۰۰

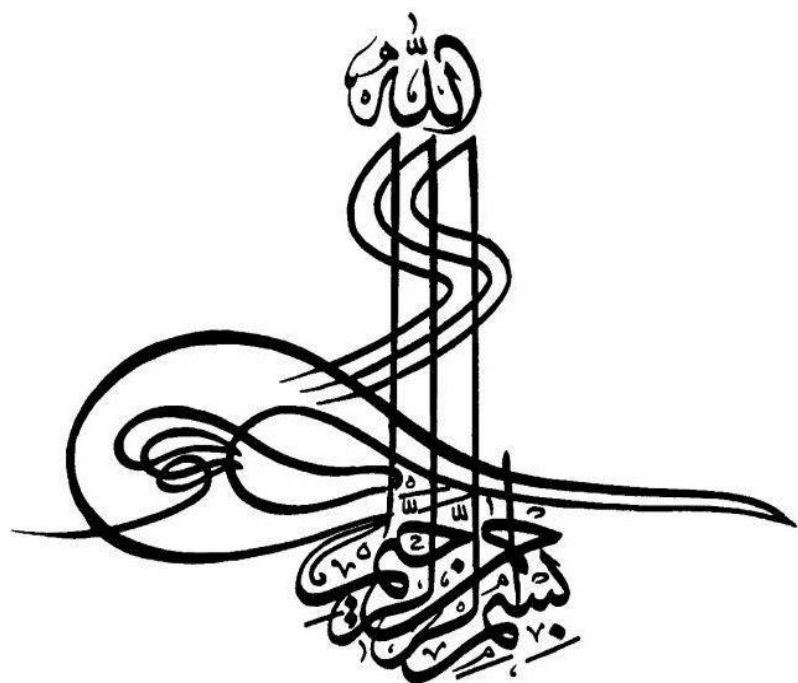
۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟
 (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۷۹- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی ساخت، به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟
 (۱) ۶۴۰۰ (۲) ۷۲۰۰ (۳) ۸۴۰۰ (۴) ۹۶۰۰

۸۰- با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به چند طریق می توان یک عدد چهار رقمی ساخت. به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟
 (۱) ۶۴۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۷۸۰ (۴) ۹۶۰

۵.۶ کلید تست‌های فصل ششم

۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱		۴	۳	۲	۱	
☐	☐	☐	☒	- ۷۳	☐	☐	☐	☒	- ۳۷	☐	☐	☐	☒	- ۱
☐	☒	☐	☐	- ۷۴	☐	☒	☐	☐	- ۳۸	☐	☐	☐	☒	- ۲
☐	☐	☒	☐	- ۷۵	☐	☐	☒	☐	- ۳۹	☐	☐	☐	☒	- ۳
☐	☒	☐	☐	- ۷۶	☐	☒	☐	☐	- ۴۰	☒	☐	☐	☐	- ۴
☐	☐	☒	☐	- ۷۷	☒	☐	☐	☐	- ۴۱	☐	☐	☐	☒	- ۵
☐	☒	☐	☐	- ۷۸	☐	☐	☐	☒	- ۴۲	☒	☐	☐	☐	- ۶
☐	☐	☒	☐	- ۷۹	☐	☐	☒	☐	- ۴۳	☐	☐	☒	☐	- ۷
☒	☐	☐	☐	- ۸۰	☐	☐	☒	☐	- ۴۴	☐	☒	☐	☐	- ۸
					☐	☐	☒	☐	- ۴۵	☐	☐	☒	☐	- ۹
					☐	☐	☐	☒	- ۴۶	☐	☒	☐	☐	- ۱۰
					☒	☐	☐	☐	- ۴۷	☐	☐	☒	☐	- ۱۱
					☒	☐	☐	☐	- ۴۸	☐	☐	☒	☐	- ۱۲
					☒	☐	☐	☐	- ۴۹	☐	☐	☐	☒	- ۱۳
					☐	☐	☒	☐	- ۵۰	☒	☐	☐	☐	- ۱۴
					☐	☐	☐	☒	- ۵۱	☐	☐	☒	☐	- ۱۵
					☐	☐	☐	☒	- ۵۲	☐	☒	☐	☐	- ۱۶
					☒	☐	☐	☐	- ۵۳	☒	☐	☐	☐	- ۱۷
					☐	☒	☐	☐	- ۵۴	☒	☐	☐	☐	- ۱۸
					☒	☐	☐	☐	- ۵۵	☐	☐	☐	☒	- ۱۹
					☐	☐	☒	☐	- ۵۶	☒	☐	☐	☐	- ۲۰
					☒	☐	☐	☐	- ۵۷	☐	☒	☐	☐	- ۲۱
					☐	☐	☐	☒	- ۵۸	☐	☐	☒	☐	- ۲۲
					☐	☐	☒	☐	- ۵۹	☐	☐	☐	☒	- ۲۳
					☐	☐	☒	☐	- ۶۰	☐	☐	☒	☐	- ۲۴
					☐	☒	☐	☐	- ۶۱	☒	☐	☐	☐	- ۲۵
					☐	☒	☐	☐	- ۶۲	☐	☒	☐	☐	- ۲۶
					☐	☒	☐	☐	- ۶۳	☐	☒	☐	☐	- ۲۷
					☒	☐	☐	☐	- ۶۴	☐	☒	☐	☐	- ۲۸
					☒	☐	☐	☐	- ۶۵	☐	☒	☐	☐	- ۲۹
					☐	☐	☒	☐	- ۶۶	☐	☐	☒	☐	- ۳۰
					☐	☒	☐	☐	- ۶۷	☒	☐	☐	☐	- ۳۱
					☒	☐	☐	☐	- ۶۸	☐	☐	☒	☐	- ۳۲
					☒	☐	☐	☐	- ۶۹	☐	☐	☒	☐	- ۳۳
					☐	☐	☒	☐	- ۷۰	☐	☒	☐	☐	- ۳۴
					☐	☒	☐	☐	- ۷۱	☐	☐	☒	☐	- ۳۵
					☐	☐	☐	☒	- ۷۲	☐	☐	☐	☒	- ۳۶



آمار و احتمال

(فصل هفتم ریاضی پایه دهم)

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی 

تمرین های برای آمادگی 

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل هفتم کتاب درسی ریاضی پایه دهم ، مبحث « امار و احتمال » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این جزوه با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این جزوه و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
۷-۱ مفاهیم اولیه احتمال.....	۶
۷-۲ قوانین احتمال.....	۱۳
۷-۲-۱ اشتراک دو پیشامد.....	۱۳
۷-۲-۲ دو پیشامد ناسازگار.....	۱۳
۷-۲-۳ اجتماع دو پیشامد.....	۱۴
۷-۲-۴ متمم یک پیشامد.....	۱۴
۷-۲-۵ تفاضل دو پیشامد.....	۱۵
۷-۲-۶ تفاضل متقارن.....	۱۶
۷-۳ احتمال های مربوط به فرزند و سکه.....	۲۱
۷-۴ احتمال های مربوط به تاس.....	۳۰
۷-۵ احتمال های مربوط به پرتاب سکه و تاس با هم.....	۳۹
۷-۶ احتمال های مربوط به انتخاب.....	۴۲
۷-۷ احتمال های مربوط به اصل ضرب.....	۵۹
۷-۸ احتمال های مربوط به جایگشت.....	۶۳
۷-۹ احتمالات و مربوط به انتخاب همراه با جایگشت.....	۷۲
۷-۱۰ تعریف آمار و علم آمار.....	۷۶
۷-۱۱ تعریف جامعه یا جمعیت.....	۷۸
۷-۱۲ متغیرهای تصادفی.....	۸۱

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تألیف حبیب هاشمی
کارشناس ارشد ریاضی کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس
دربزرگاری کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش و پرورش با شماره
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

بخش اول

احتمال

۱-۷ مفاهیم اولیه احتمال

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده ها یا آزمایش هایی را که نتیجه آن به طور دقیق قابل پیش بینی نباشد، اما از همه ی حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم پدیده ها یا آزمایش های تصادفی می نامیم

مثال: نتیجه یک بازی فوتبال از قبل به طور دقیق قابل پیش بینی نیست اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.

فضای نمونه ای: مجموعه ی همه ی حالت های ممکن در آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای گوئیم .

تذکر ۱: فضای نمونه ای را با S نشان می دهیم.

تذکر ۲: تعداد اعضای فضای نمونه ای را با $n(S)$ نشان می دهیم.

مثال: در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $S = \{\text{پشت ، رو}\}$

مثال: در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای برابر است با $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گوئیم.

تذکر ۱: پیشامد را با یکی از حروف بزرگ لاتین مانند $A, B, C, \dots$ نشان دهیم.

تذکر ۲: تعداد اعضای پیشامد را با $n(A)$ نشان می دهیم.

تذکر ۳: پیشامد S را حتمی و پیشامد $\emptyset$ را نشدنی می گوئیم.

مثال: در پرتاب یک تاس مطلوبست:

الف) پیشامد آنکه عدد رو شده زوج باشد. $A = \{2, 4, 6\}$

ب) پیشامد آنکه عدد رو شده اول باشد. $B = \{2, 3, 5\}$

پ) پیشامد آنکه عدد رو شده بزرگتر از ۴ باشد. $C = \{5, 6\}$

ت) پیشامد آنکه عدد رو شده کمتر از ۷ باشد (پیشامد حتمی) $D =$

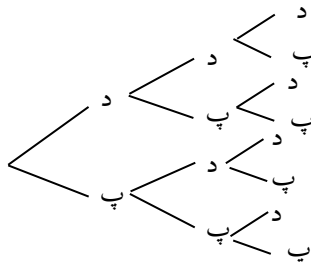
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S \rightarrow$$

ث) پیشامد آنکه عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد. پیشامد نشدنی $E = \{\} = \emptyset \rightarrow$

مثال: خانواده ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه ای مربوط به فرزندان این

خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

حل) به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را مشخص می کنیم



$$S = \{ \text{د د د}, \text{د د پ}, \text{د پ د}, \text{د پ پ}, \text{پ د د}, \text{پ د پ}, \text{پ پ د}, \text{پ پ پ} \}$$

$$E = \{ \text{د د د}, \text{د د پ}, \text{د پ د}, \text{د پ پ}, \text{پ د د}, \text{پ د پ}, \text{پ پ د} \}$$

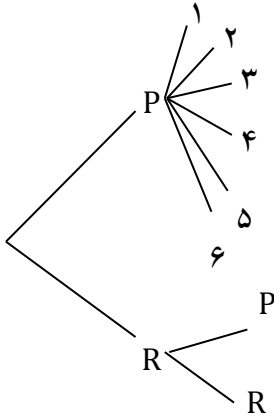
مثال: سکه ای را به هوا می اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می اندازیم و اگر رو

بیاید دو سکه دیگر را می اندازیم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه « حداقل ۲ سکه رو بیاید » را مشخص کنید.



الف $S = \{P\ ۱, P\ ۲, P\ ۳, P\ ۴, P\ ۵, P\ ۶, P\ P, P\ R\}$

ب) $A = \{P\ ۲, P\ ۴, P\ ۶\}$

پ) $B = \{P\ R\}$

نکته: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد احتمال وقوع پیشامد A را با $P(A)$ نشان می دهیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد فضای نمونه ای } S} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{\text{تعداد حالات خواسته سوال}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

نکته: اگر S فضای نمونه ای متاهی و ناتهی برای یک آزمایش تصادفی باشد و A و B پیشامدهایی در این فضا باشند، در این صورت:

$$I) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\text{زیرا } A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$II) P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$$

مثال: یک تاس را پرتاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) عدد رو شده زوج باشد.

جواب:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب) عدد رو شده مضرب ۳ باشد.

جواب:

$$B = \{۳, ۶\}, P(B) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

پ) عدد رو شده اول باشد.

جواب:

$$C = \{۲, ۳, ۵\}, P(C) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

ت) عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.

جواب:

$$D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} = S, P(D) = \frac{۶}{۶} = ۱$$

(پیشامد حتمی (قطعی)

ث) عدد رو شده بزرگتر از ۶ باشد.

جواب:

$$E = \{ \} = \emptyset, P(E) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

(پیشامد غیر ممکن)

نکته: در احتمال قطعی $P(S) = ۱$ و در احتمال نشدنی $P(\emptyset) = ۰$ است.

مثال: فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار

رقم می توانیم بسازیم، روی یک کارت می نویسیم و آنها را در کیسه ای قرار می

دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم:

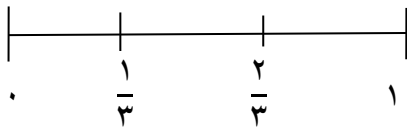
اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب « خارج شدن عدد زوج » و « خارج شدن عدد

فرد » تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟

$$S = \{۴۳, ۳۴, ۲۴, ۴۲, ۲۳, ۳۲, \}$$

$$A = \{۳۴, ۲۴, ۴۲, ۳۲\}, B = \{۴۳, ۲۳\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}, p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$



واضح است که $p(A) > P(B)$ پس شانس رخداد پیشامد A از شانس رخداد

پیشامد B بیشتر است. (پس این مثال تعداد عددهای زوج از تعداد عددهای فرد،

بیشتر است)

توجه : خواهشمندیم در صورت استفاده کردن از جزوه مبلغ ۵۰۰۰ تومان به

عنوان حق تالیف به شماره کارت ۵۸۵۹۸۳۱۰۷۱۲۰۶۴۱۰ بانک تجارت به

نام حبیب هاشمی واریز گردد. با تشکر فراوان

(استفاده از تمامی جزوات برای همکاران محترم رایگان است.)

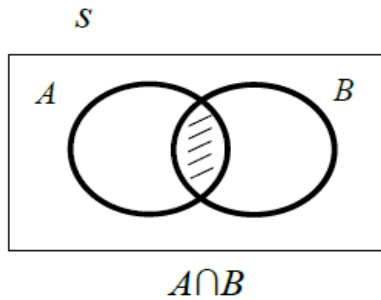
۲-۷ قوانین احتمال

۱-۲-۷ اشتراك دو پيشامد

اگر A و B دو پيشامد باشند، $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که دو پيشامد A و B رخ دهند.

هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که A و B رخ دهد (هم A و هم B رخ دهد، A و B

هر دو رخ دهد) را به دست آوریم باید $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.

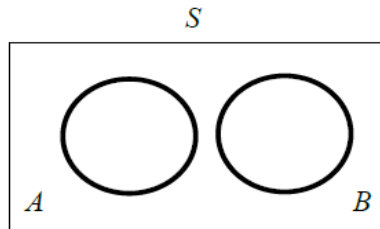


$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

۲-۲-۷ دو پيشامد ناسازگار

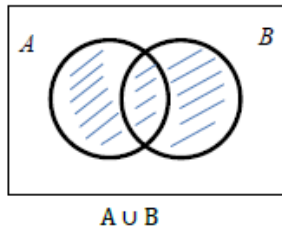
دو پيشامد A و B را ناسازگار می گوئیم هرگاه، با هم نتوانند رخ دهند به عبارت دیگر

وقوع یکی به معنی عدم وقوع دیگری است. یعنی $A \cap B = \emptyset$ و $P(A \cap B) = 0$



۷-۲-۳ اجتماع دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد باشند، $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که یکی از پیشامدهای A و B یا هر دو رخ دهند. هرگاه از ما بخواهند احتمال آن که A یا B رخ دهد (لااقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد) را به دست آوریم، بایستی $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم.



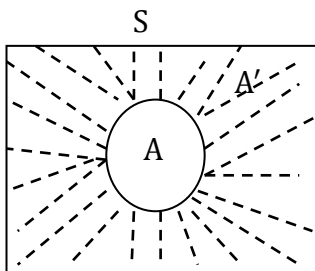
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۷-۲-۴ متمم یک پیشامد:

متمم پیشامد A را با A' یا A^c نشان می‌دهیم این پیشامد در صورتی می‌دهد که A رخ ندهد در احتمالات بین A و A' رابطه‌ی زیر برقرار است.



$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

نکته: $A \cap A' = \emptyset$
 $A \cup A' = S$

دقت کنیم: از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای

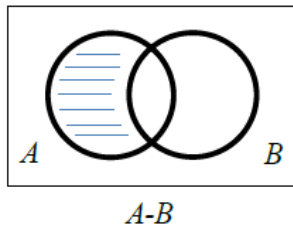
پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته،

احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

۵-۲-۷ تفاضل دو پیشامد

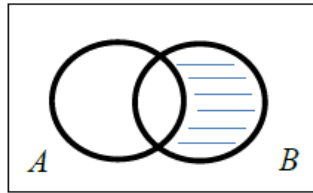
اگر B و A دو پیشامد باشند $A - B$ زمانی رخ می دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد.
 (فقط **A** رخ دهد).

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



اگر B و A دو پیشامد باشند $B - A$ زمانی رخ می دهد که B رخ دهد ولی A رخ ندهد.
 (فقط **B** رخ دهد).

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$



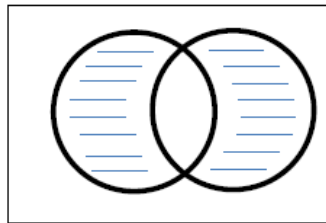
• اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - 0 = P(A)$$

۶-۲-۷ تفاضل متقارن

اگر A و B دو پیشامد باشند $(A - B) \cup (B - A)$ وقتی رخ می دهد که

فقط A یا فقط B رخ دهد. (فقط یکی از پیشامدها رخ دهد)



$$(A - B) \cup (B - A)$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

مثال: یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد اگر ۳۴ درصد از

مشتریان کارت نوع A ($P(A) = \frac{34}{100}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر

دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن

حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{34}{100} + \frac{62}{100} - \frac{15}{100} = \frac{81}{100}$$

مثال: احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ و برای هر دو ۰/۷۲ است. با کدام احتمال، لا اقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

$$(۱) \quad ۰/۹۲ \quad (۲) \quad ۰/۹۴ \quad (۳) \quad ۰/۹۶ \quad (۴) \quad ۰/۹۸$$

جواب:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = ۰/۹ + ۰/۸ - ۰/۷۲ = ۰/۹۸$$

مثال: احتمال قبولی دانش آموزی در درس فیزیک، ۰/۵۵ و در درس شیمی، ۰/۶ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود، ۰/۷۵ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می شود؟ (سراسری ریاضی)

$$(۱) \quad ۰/۳۵ \quad (۲) \quad ۰/۴ \quad (۳) \quad ۰/۴۵ \quad (۴) \quad ۰/۵$$

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$۰/۷۵ = ۰/۵۵ + ۰/۶ - P(A \cap B)$$

$$۰/۷۵ = ۱/۱۵ - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = ۱/۱۵ - ۰/۷۵ \rightarrow \frac{۱۱۵}{۱۰۰} - \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

مثال: احتمال آن که فرزندی در یک خانواده با چشم های روشن متولد شود ۰/۲ و احتمال آن که رنگ مویش روشن باشد، ۰/۳ است. اگر احتمال متولد شدن فرزندی با مو و چشم به رنگ روشن ۰/۱ باشد. احتمال آن را بیابید که فرزند متولد شده فقط موی روشن داشته باشد.

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۱۶)

جواب:

$P(B) = ۰/۳$ رنگ موی روشن, $P(A) = ۰/۲$ چشم روشن

$P(A \cap B) = ۰/۱$ چشم روشن و رنگ مو روشن

$P(B - A) = ? \rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$

تمرین: $۰/۳$ احتمال دارد فرزندی در یک خانواده با گروه خونی A متولد شود، و احتمال آن که رنگ چشم فرزند میشی باشد، $۰/۴$ است. اگر احتمال متولد شده فرزندی با گروه خونی A و رنگ چشم میشی $۰/۱۵$ باشد؛ مطلوبست احتمال آن که:

الف) حداقل یکی از آن ها گروه خونی A یا رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: $۰/۵۵$

ب) فقط گروه خونی A داشته باشد.

جواب: $۰/۱۵$

ت) فقط گروه خونی A یا فقط رنگ چشم میشی داشته باشد.

جواب: $۰/۴$

مثال: کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند:

تحصیلات	جنسیت	
	زن	مرد
دانشگاهی	۱۰	۱۵
کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

الف) احتمال آن که کارمندی زن باشد و تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

جواب:

$$A: \text{زن باشد} \rightarrow P(A) = \frac{90}{195}$$

$$B: \text{مرد باشد} \rightarrow P(B) = \frac{105}{195}$$

$$C: \text{تحصیلات دانشگاهی داشته باشد} \rightarrow P(C) = \frac{25}{195}$$

$$D: \text{تحصیلات کمتر از دانشگاهی داشته باشد} \rightarrow P(D) = \frac{170}{195}$$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{10}{195}$$

ب) احتمال آن که کارمندی مرد باشد یا تحصیلات دانشگاهی داشته باشد.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{105}{195} + \frac{25}{195} - \frac{15}{195} = \frac{115}{195}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ آنگاه $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$1) \quad \frac{2}{3} \quad 2) \quad \frac{11}{12} \quad 3) \quad \frac{5}{6} \quad 4) \quad \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

مثال: اگر $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ باشد $P(A - B)$ را به دست آورید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{15}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

توجه : خواهشمندیم در صورت استفاده کردن از جزوه مبلغ ۵۰۰۰ تومان به عنوان حق تالیف به شماره کارت ۵۸۵۹۸۳۱۰۷۱۲۰۶۴۱۰ بانک تجارت به نام حبیب هاشمی واریز گردد. با تشکر فراوان

(استفاده از تمامی جزوات برای همکاران محترم رایگان است.)

۳-۷ احتمال های مربوط به فرزند و سکه

نکته: برای حل احتمال های مربوط به فرزند یا سکه با استفاده از نمودار درختی فضای نمونه ای

را مشخص می کنیم سپس اعضای پیشامد را از فضای نمونه ای انتخاب می کنیم و از فرمول

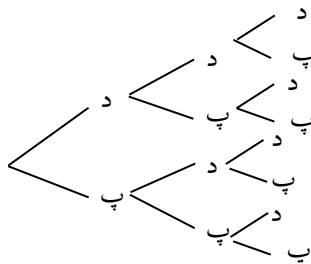
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال را به دست می آوریم.

مثال: خانواده ای دارای ۳ فرزند است مطلوبست احتمال آنکه یک فرزند دختر

داشته باشد؟

حل) به کمک نمودار درختی فضای نمونه ای را مشخص می کنیم



$$S = \{\text{دد, دپ, دپ, دپ, پد, پد, پپ, پپ}\}$$

فضای نمونه ای

$$E = \{\text{دپ, پد, پپ}\}$$

پیشامد

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد فضای نمونه ای } S} = \frac{۳}{۸}$$

روش کنکوری احتمال های مربوط به فرزند و سکه

حالت اول (ترتیب فرزندان بیان نشود)

نکته: در یک خانواده ی n فرزندی احتمال آن که دقیقاً k فرزند پسر (دختر) باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ به دست می آید. (از این فرمول وقتی استفاده می کنیم که تولد دختر و پسر هم شانس باشند و ترتیب فرزندان بیان نشود).

روش دوم: اگر ترتیب فرزندان بیان نشود خودمان یک ترتیب بیان می کنیم و در تعداد جایگشت ها ضرب می کنیم

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n} = \frac{\binom{۳}{۲}}{۲^۳} = \frac{۳}{۸} \quad \text{در مثال قبل:}$$

مثال: یک خانواده دارای چهار فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) یک فرزند دختر داشته باشد.

جواب: $\frac{۱}{۴}$

راه حل اول:

$$\frac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴}$$

راه حل دوم:

$$\rightarrow (پ پ پ د)$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{4!}{3!} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

تذکر: در روش دوم ما یک ترتیب دلخواه را در نظر می گیریم، سپس در جایگشت فرزندان ضرب می کنیم.

ب) یک فرزند دختر و سه فرزند پسر داشته باشد.

$$\text{جواب: } \frac{1}{4}$$

$$\text{راه حل اول: } \frac{\binom{4}{1}}{2^4}$$

راه حل دوم:

$$\rightarrow (پ پ پ د)$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{4!}{3!} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

پ) دو فرزند پسر داشته باشد.

$$\text{جواب: } \frac{3}{8}$$

راه حل اول:

$$\frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

روش دوم:

$$\rightarrow (د د پ پ)$$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

(ت) دو فرزند پسر و دو فرزند دختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۸۴)

جواب: $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ (همان قسمت پ می باشد).

(ث) دو فرزند پسر یا سه فرزند دختر داشته باشد. (سراسری تجربی ۹۰)

جواب:

$$A: \rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$$

$$B: P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$$

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{16} + \frac{6}{16} - 0 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

(ج) فرزندان همجنس باشند.

جواب:

$$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{24}{4}} + \frac{\binom{4}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

ب یا
هر ۴ تا دختر هر ۴ تا پسر

چ) فرزندان همجنس نباشند.

جواب: متمم این مساله، فرزندان هم جنس می باشد که در قسمت قبل حل شد. بنابراین :

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

دقت کنیم: از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته، احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

ح) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{24}{3}} + \frac{\binom{4}{4}}{\binom{24}{4}} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

ب یا
۳ پسر ۴ پسر

خ) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم برابر باشد.

جواب: ۲ پسر و ۲ دختر به قسمت پ و ت مراجعه شود. که مقدار آن برابر است با: $\frac{3}{8}$

د) تعداد فرزندان دختر و پسر با هم متفاوت باشد.

جواب: متمم این مساله تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند که در قسمت قبل حل شد.
بنابراین :

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

(ذ) حداقل یک فرزند پسر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با، هیچکدام از فرزندان پسر نباشند. که مقدار آن برابر است با:

$$1 - \frac{\binom{4}{0}}{2^4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(ر) حداکثر دو فرزند دختر داشته باشد.

جواب: متمم این مساله برابر است با ۳ یا ۴ دختر داشته باشد. که مقدار آن برابر است با:

$$1 - \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = 1 - \frac{4 + 1}{16} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

مثال: در یک بیمارستان ۵ نوزاد متولد شده‌اند با کدام احتمال لااقل دو نفر از آنان دختر است؟

$$\frac{13}{16} (4)$$

$$\frac{7}{16} (3)$$

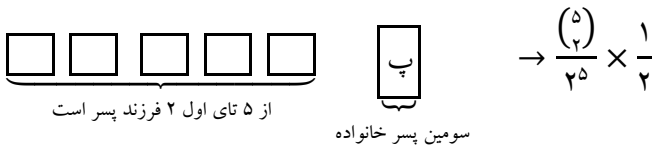
$$\frac{3}{8} (2)$$

$$\frac{5}{16} (1)$$

$$1 - \frac{\binom{5}{0} + \binom{5}{1}}{2^5} = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16}$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۶ فرزند است احتمال آن که آخرین فرزند سومین پسر خانواده باشد کدام است؟

جواب:



$$\rightarrow \frac{\binom{5}{2}}{2^5} \times \frac{1}{2}$$

مثال: سکه‌ای آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای سومین بار رو بیاید، احتمال آن که در هشتمین پرتاب به این منظور برسیم، کدام است؟

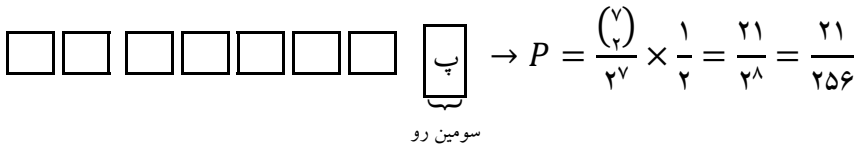
$$\frac{21}{256} \quad \checkmark$$

$$\frac{56}{256} \quad (3)$$

$$\frac{28}{56} \quad (2)$$

$$\frac{121}{128} \quad (1)$$

جواب:



$$\rightarrow P = \frac{\binom{7}{2}}{2^7} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2^8} = \frac{21}{256}$$

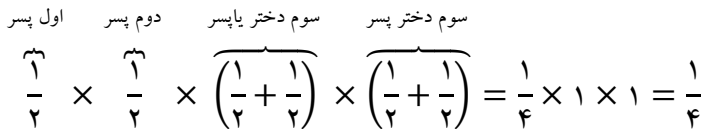
سومین رو

حالت دوم (ترتیب فرزندان بیان شود (اصل ضرب)

مثال: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:



$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

ب) فقط فرزند اول و دوم پسر باشد.

جواب:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

پ) فرزند اول و دوم پسر و فرزند سوم و چهارم دختر باشد.

جواب:

$$\text{پ د پ د پ} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ت) فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

$$\left(\begin{matrix} \text{د} \\ \text{د د د} \end{matrix} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ث) فقط فرزند آخر دختر باشد.

جواب:

$$\text{پ د پ د پ} \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ج) فرزند دوم و چهارم پسر باشد.

جواب:

$$\left(\begin{matrix} \text{د} \\ \text{د د د} \end{matrix} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

چ) فرزندان یک در میان دختر، پسر (پسر، دختر) باشند.

جواب: فرزندان به صورت (پ د پ د) یا (پ د پ د) هستند بنابراین داریم:

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. مطلوبست احتمال آن که فرزند اول پسر باشد یا

خانواده دارای ۲ فرزند پسر باشد؟

جواب:

$$A: \text{فرزند اول پسر} \rightarrow p(A) = \frac{4}{8}$$

$$B: \text{دو فرزند پسر} \rightarrow p(B) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{ \text{د پ پ، د پ پ} \} \rightarrow p(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

۴-۱۷ احتمال های مربوط به پرتاب تاس

الف) احتمال های مربوط به دو تاس

نکته: برای حل احتمال های مربوط به دو تاس ابتدا با استفاده از جدول زیر فضای نمونه ای را مشخص می کنیم سپس اعضای پیشامد را از فضای نمونه ای انتخاب می کنیم و احتمال را از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ به دست می آوریم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

نکته: اعضای فضای نمونه ای در پرتاب n تاس برابر n^n است.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم، مطلوبست احتمال آن که:

الف) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ باشد.

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (4,6), (5,5), (6,4)\} \text{ و } P(A) = \frac{7}{36}$$

ب) مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد. (سراسری تجربی ۹۲)

$$B = \{(1,3), (2,2), (3,1), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (6,6)\}$$

$$n(B) = 9, P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

پ) مجموع اعداد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد. مثل (۱، ۳) و (۲، ۲) و...

$$\frac{7}{36} \text{ جواب:}$$

ت) مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ باشد.

$$\frac{30}{36} \text{ جواب:}$$

ث) مجموع اعداد رو شده برابر ۴ یا ۹ باشد.

جواب:

$$A = \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{36}$$

$$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \rightarrow P(B) = \frac{4}{36}$$

$$A \cap B = \{ \} \rightarrow p(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} - 0 = \frac{7}{36}$$

ج) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا هر دو فرد باشند.

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ جواب:}$$

چ) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ و هر دو فرد باشند.

$$\frac{2}{36} \text{ جواب:}$$

ح) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا زوج باشند.

$$\frac{11}{36} \text{ جواب:}$$

خ) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ و هر دو زوج باشند.

جواب: $\frac{3}{36}$

(د) اعداد رو شده زوج و اختلافشان برابر ۲ باشد.

جواب: $\frac{4}{36}$

(ذ) دو تاس یکسان ظاهر شوند یا مجموعشان بزرگتر از ۹ باشد.

جواب: $\frac{5}{18}$

مثال: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که اعداد رو شده متوالی باشند کدام است؟

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{5}{36} (2) \quad \frac{5}{12} (3) \quad \frac{5}{18} (4) \quad \sqrt{}$$

جواب:

$$A = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5)\}$$

$$n(A) = 10, P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

مثال: یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم احتمال آن که عددی که بار دوم رو می شود

کمتر از بار اول باشد؟

$$\frac{15}{36} (1) \quad \frac{21}{36} (2) \quad \frac{12}{36} (3) \quad \frac{18}{36} (4) \quad \sqrt{}$$

جواب:

$$A = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2), \dots\}, n(A) = 15, P(A) = \frac{15}{36}$$

تمرین: در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن که حداقل یکی از دو تاس ۵ بیاید کدام

است؟

$$\frac{1}{2} (1) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \frac{11}{36} (3) \quad \frac{5}{12} (4) \quad \sqrt{}$$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم) مطلوبست احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده تاس مثل هم باشند.

جواب:

$$A = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}, n(A) = 6, P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) اعداد رو شده تاس مثل هم نباشند.

$$\text{جواب: } 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

نکته: اگر دو تاس با هم درگیر باشند مانند مجموع؛ تفاضل و... حتماً بایستی با نوشتن اعضای پیشامد تعداد آن را به دست آوریم

نکته: در صورتی که دو تاس با هم درگیر نباشند: مانند هر دو تاس مضرب ۳، هر دو تاس زوج، حاصل ضرب دو تاس فرد و هر دو تاس عدد اول و... علاوه بر روش قبل می توانیم با استفاده از اصل ضرب نیز تعداد اعضای پیشامد را به دست آوریم.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم (یا یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم) مطلوبست احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده ی تاس متمایز باشند.

جواب:

$$\boxed{6} \times \boxed{5} = 30, P = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

تاس دوم ۵ حالت دارد. تاس اول ۶ حالت دارد.

ب) اعداد رو شده‌ی دو تاس مضرب ۳ باشند.

جواب:

$$\boxed{2} \times \boxed{2} = 2 \times 2 = 4 \text{ و } P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۳ یا ۶ ۳ یا ۶

پ) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

جواب: از متمم آن را حل می‌کنیم که اعداد رو شده مضرب ۳ باشند. (اگر یکی از اعداد مضرب ۳ باشد ایرادی ندارد).

$$1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

اگر می‌گفت اعداد رو شده‌ی هر دو تاس مضرب ۳ نباشد جواب آن به صورت زیر است:

$$n(A) = \boxed{4} \times \boxed{4} = 16, P(A) = \frac{16}{36}$$

۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵ ۱ یا ۲ یا ۴ یا ۵

ت) هر دو تاس عدد اول باشند.

جواب:

$$n(A) = \boxed{3} \times \boxed{3} = 9, P(A) = \frac{9}{36}$$

۲ یا ۳ یا ۵ ۲ یا ۳ یا ۵

ث) حداقل یکی از تاس‌ها عدد اول باشد.

$$p = \frac{27}{36} \text{ جواب:}$$

ج) حاصلضرب اعداد رو شده فرد باشد.

$$p = \frac{9}{36} \text{ جواب:}$$

ح) حاصلضرب اعداد رو شده زوج باشد.

$$p = \frac{27}{36} \text{ جواب:}$$

ب) احتمال های مربوط به سه تاس

مثال: سه تاس را با هم پرتاب می کنیم مطلوبست احتمال آن که:

$$n(S) = 6^3 = 6 \times 6 \times 6$$

الف) اعداد ظاهر شده مثل هم باشند؟

$$\frac{6}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{36} \text{ جواب:}$$

ب) اعداد ظاهر شده مثل هم (یکسان) نباشند.

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \text{ جواب:}$$

پ) اعداد ظاهر شده متمایز باشند.

جواب: برای به دست آوردن تعداد اعضای پیشامد تاس اول ۶ حالت دارد، تاس دوم ۵ حالت و تاس سوم ۴ حالت، که احتمال آن به صورت زیر است:

$$n(A) = 6 \times 5 \times 4, P(A) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{9}$$

ت) حداقل دو عدد مثل هم باشند.

$$1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \text{ جواب:}$$

متمم: هیچ دو عددی مثل هم نباشند (اعداد متمایز باشند).

(ث) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشند.

$$n(A) = \underbrace{\boxed{2}}_6 \times \underbrace{\boxed{2}}_6 \times \underbrace{\boxed{2}}_6 = 8, P(A) = \frac{8}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{27}$$

(ج) اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند ؟

$$\text{جواب: } 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

(چ) هر سه عدد ظاهر شده مضرب ۳ نباشند.

مضرب ۳ نباشد. مضرب ۳ نباشد. مضرب ۳ نباشد.

$$n(A) = \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{1 \\ 2 \\ 4 \\ 5}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{1 \\ 2 \\ 4 \\ 5}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{1 \\ 2 \\ 4 \\ 5}} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6}$$

(ح) فقط دو تاس مضرب ۳ باشد.

مضرب ۳ نباشد. مضرب ۳ نباشد. مضرب ۳ باشد.

$$n(A) = \underbrace{\boxed{2}}_6 \times \underbrace{\boxed{2}}_6 \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{1 \\ 2 \\ 4 \\ 5}} \times \frac{3!}{2!} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{2 \times 2 \times 4 \times \frac{3!}{2!}}{6 \times 6 \times 6}$$

(خ) هر سه عدد مضرب ۲ باشند.

$$n(A) = \underbrace{\boxed{3}}_6 \times \underbrace{\boxed{3}}_6 \times \underbrace{\boxed{3}}_6 \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

(د) حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد (بایستی هر سه عدد فرد باشند).

$$n(A) = \underbrace{3}_{30} \times \underbrace{3}_{20} \times \underbrace{3}_{20} \text{ و } P(A) = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

(ذ) حاصلضرب سه عدد رو شده زوج باشد.

$$\text{جواب: } 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

متمم: حاصلضرب سه عدد رو شده فرد باشد.

(ر) یک بار ۶ و دو بار عدد دیگری ظاهر شود.

$$n(A) = \underbrace{1}_{6} \times \underbrace{5}_{20} \times \underbrace{5}_{20} \times \frac{3!}{2!} \text{ و } P(A) = \frac{1 \times 5 \times 5 \times \frac{3!}{2!}}{6 \times 6 \times 6} = \frac{25}{72}$$

تعداد جایگشت ها

(ز) فقط یک بار ۶ ظاهر شود ؟

جواب: مشابه قسمت (ر) است.

(ژ) در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

$$n(A) = \underbrace{6}_{20} \times \underbrace{6}_{20} \times \underbrace{1}_{6} \text{ و } P(A) = \frac{6 \times 6 \times 1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

(س) فقط در بار سوم عدد ۶ رخ دهد.

$$n(A) = \underbrace{5}_{\substack{1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5}} \times \underbrace{5}_{\substack{1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5}} \times \underbrace{1}_6 \text{ و } P(A) = \frac{5 \times 5 \times 1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{25}{216}$$

ش) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۶ بزرگتر باشد.

$$\begin{aligned} & (6,6,6) \rightarrow \frac{3!}{3!} = 1 \text{ :جمع سه عدد ۱۸ شود.} \\ & (6,6,5) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \text{ :جمع سه عدد ۱۷ شود.} \\ \rightarrow P &= \frac{4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{54} \end{aligned}$$

ص) مجموع اعداد ظاهر شده از ۱۵ بزرگتر باشد؟

$$\begin{aligned} & (6,6,6) \rightarrow \frac{3!}{3!} = 1 \text{ :جمع سه عدد ۱۸ شود.} \\ & (6,6,5) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \text{ :جمع سه عدد ۱۷ شود.} \\ & \text{جمع سه عدد ۱۶ شود.} \begin{cases} (6,5,5) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \\ (6,6,4) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \end{cases} \\ \rightarrow P &= \frac{10}{6 \times 6 \times 6} = \frac{10}{216} \end{aligned}$$

ض) مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از ۵ باشد.

$$\begin{aligned} & (1,1,1) \rightarrow \frac{3!}{3!} = 1 \text{ :جمع سه عدد ۳ شود.} \\ & (1,1,2) \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \text{ :جمع سه عدد ۴ شود.} \\ \rightarrow P &= \frac{1+3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{4}{216} \end{aligned}$$

ط) مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ باشد.

$$\text{جواب: } 1 - \frac{10}{216}$$

متمم: مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۵ نباشد (کوچکتر یا مساوی ۵ شود).

۵-۷ احتمال پرتاب سکه و تاس با هم

مثال: یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم، اگر عددی اول ظاهر شود یک تاس سالم دیگر، و اگر عدد مرکب ظاهر شود دو سکه با هم، و در غیر این صورت یک سکه سالم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

جواب:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ۲ & ۳ & ۵ & & \\ \hline \boxed{۳} & & & & \end{array} \times \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ \hline \boxed{۶} & & & & & \end{array} = ۱۸ \text{ یا } \begin{array}{ccccc} & & ۴ & ۶ & \\ \hline \boxed{۲} & & & & \end{array} \times \begin{array}{c} \text{پ} \\ \hline \boxed{۲} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{پ} \\ \hline \boxed{۲} \end{array} = ۸ \text{ یا } \begin{array}{c} ۱ \\ \hline \boxed{۱} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{پ} \\ \hline \boxed{۲} \end{array} = ۲ \\ \text{عدد اول} \quad \text{تاس دیگر} \quad \text{عدد مرکب} \quad \text{سکه} \quad \text{سکه} \quad \text{عدد یک} \quad \text{سکه} \end{array}$$

$$n(S) = ۱۸ + ۸ + ۲ = ۲۸$$

نکته: برای احتمال‌های مربوط به سکه و تاس با هم احتمال‌های مربوط به هر کدام را جداگانه حساب می‌کنیم. اگر بین آن‌ها و به کار رفته بود در هم ضرب می‌کنیم (اشتراک)، اگر یا به کار رفته بود (اجتماع) را حساب می‌کنیم.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ اشتراک}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \text{ اجتماع}$$

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که:

الف) عدد تاس مضرب ۳ و سکه شیر بیاید.

جواب:

$$A = \{۳, ۶\} \rightarrow P(A) = \frac{۲}{۶}, B = \{\text{ش}, \text{خ}\} \rightarrow P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

ب) عدد تاس مضرب ۳ یا سکه شیر باشد.

جواب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال: در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم احتمال این که حداقل یک رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

$$\frac{1}{3} (۴) \quad \frac{1}{4} (۳\sqrt{3}) \quad \frac{1}{6} (۲) \quad \frac{1}{12} (۱)$$

جواب:

$$S = \{(ر, ر), (پ, پ), (ر, پ), (پ, ر)\}$$

$$A = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر)\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

$$B = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

مثال: در پرتاب سه سکه و یک تاس با هم احتمال این که دو رو و عدد تاس مضرب ۳ نباشد کدام است؟

جواب:

$$\left\{ \begin{array}{l} A: P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8} \\ B: P(B) = \frac{4}{6} \text{ مضرب ۳ نباشد} \end{array} \right. \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{4}$$

مثال: در پرتاب دو سکه و دو تاس با هم، احتمال این که حداکثر یک پشت یا اعداد دو تاس فرد باشند کدام است؟

$$A: P(A) = \frac{3}{4} \text{ حداکثر یک پشت}$$

$$B: P(B) = \frac{9}{36} \text{ دو تاس فرد}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{9}{36} - \left(\frac{3}{4} \times \frac{9}{36} \right)$$

۷-۶ احتمال های مربوط به انتخاب (انتخاب مهره؛ انتخاب موش ...)

مثال: کیسه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف و با هم از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) فقط یک مهره سفید باشد.

جواب:

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165, n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{2} = 75$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{75}{165}$$

ب) هر سه مهره آبی باشند.

جواب:

$$P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3} \binom{1}{0}}{165} = \frac{4}{165}$$

ج) حداکثر دو مهره آبی باشد.

جواب:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{165} = \frac{161}{165}$$

د) یک مهره آبی و حداکثر یک مهره زرد باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1} \binom{5}{1}}{165} + \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{165} = \frac{40}{165} + \frac{40}{165} = \frac{80}{165}$$

ه) دو مهره سفید و حداکثر دو مهره آبی باشد؟

جواب:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{165} = \frac{60}{165}$$

و) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{165} = \frac{14}{165}$$

ز) مهره‌ها هم‌رنگ نباشند.

جواب:

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{14}{165} = \frac{151}{165}$$

نکته: احتمال مهره‌ها هم‌رنگ باشند $- 1 =$ احتمال حداکثر دو مهره هم‌رنگ باشند.

ح) حداکثر دو مهره هم‌رنگ باشد؟

جواب:

احتمال مهره‌ها هم‌رنگ باشند $- 1 =$ احتمال حداکثر دو مهره هم‌رنگ باشند

$$1 - \frac{14}{165} = \frac{151}{165}$$

ط) مهره‌ها متمایز باشند (هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشد).

جواب:

$$P(D) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{2}{1}}{165} = \frac{40}{165}$$

ی) حداقل دو مهرہ ہم رنگ باشد.

$$P(D') = 1 - P(D) = 1 - \frac{40}{165} = \frac{125}{165}$$

نکتہ: احتمال هیچ دو مهرہ ای ہم رنگ نباشند $= 1 -$ احتمال حداقل دو مهرہ ہم رنگ باشند.

ح) هیچکدام از مهرہ ہا سفید نباشند.

جواب:

$$P(E) = \frac{\binom{5}{0} \binom{6}{3}}{165} = \frac{20}{165}$$

ط) حداقل یک مهرہ سفید باشد.

جواب:

$$P(\bar{E}) = 1 - \frac{20}{165} = \frac{145}{165}$$

ی) یک مهرہ آبی و حداقل یک مهرہ سفید باشد.

جواب:

$$\frac{\binom{4}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{5}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}$$

ک) حداکثر سه مهرہ آبی باشد؟

جواب: ۱

ل) حداقل دو مهره زرد باشد؟

$$\text{جواب: } \frac{\binom{2}{2}\binom{9}{1}}{\binom{11}{3}}$$

مثال: در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره

به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) هر سه مهره آبی باشند.

$$\text{الف) } n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}$$

ب) هر سه مهره هم رنگ باشند.

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{35} = \frac{1}{7} \quad \text{یا هر سه مهره آبی، یا هر سه قرمز}$$

پ) دقیقاً ۲ مهره هم رنگ باشند.

$$\text{پ) } P(C) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{35} = \frac{18 + 12}{35} \quad \text{دو مهره قرمز و یک مهره آبی یا دو آبی و یک قرمز}$$

مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ اند؟ **(سراسری تجربی خارج ۹۲)**

$$\frac{1}{6} (1) \quad \frac{3}{14} (2) \quad \frac{2}{9} (3) \quad \frac{5}{14} (4)$$

جواب:

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 + 10}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

مثال: در جعبه ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟ **(سراسری تجربی خارج ۹۴)**

$$\frac{28}{45} (1) \quad \frac{29}{45} (2) \quad \frac{31}{45} (3) \quad \frac{32}{45} (4)$$

جواب:

$$P(\text{همرنگ نبودن ۲ مهره ی انتخابی}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} =$$

$$\frac{(3 \times 2) + (3 \times 5) + (2 \times 5)}{45} = \frac{31}{45}$$

تمرین: در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است؟ **(سراسری تجربی خارج ۹۵)**

$$\frac{8}{21} (1) \quad \frac{17}{42} (2) \quad \frac{10}{21} (3) \quad \frac{9}{14} (4)$$

مثال: در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم، با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟ (سراسری تجربی خارج ۹۳)

$$(1) \quad \frac{31}{42} \quad \sqrt{\quad} \quad \frac{37}{42} \quad (2) \quad \frac{67}{84} \quad (3) \quad \frac{73}{84} \quad (4)$$

جواب:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{(4 \times 10) + (6 \times 5) + (4 \times 1)}{84} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ (سراسری تجربی ۸۶)

$$(1) \quad \frac{2}{7} \quad (2) \quad \frac{2}{5} \quad \sqrt{\quad} \quad (3) \quad \frac{3}{7} \quad (4) \quad \frac{3}{5}$$

جواب:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{5}{3}}{\binom{7}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

مثال ۱۲۸: در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آن ها خارج می کنیم، با کدام احتمال لا اقل یکی از موش ها سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۱)

$$(1) \quad \frac{8}{11} \quad (2) \quad \frac{9}{11} \quad (3) \quad \frac{28}{33} \quad \sqrt{\quad} \quad (4) \quad \frac{29}{33}$$

جواب: خواسته سوال ۱ یا ۲ یا ۳ تا از موش ها سفید باشند متمم آن برابر هیچ کدام سفید نباشند.

$$P(A') = 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = 1 - \frac{20}{165} = \frac{145}{165} = \frac{29}{33}$$

تمرین: در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج ۹۴)

$$\frac{50}{143} (4) \quad \frac{40}{143} (3) \quad \frac{25}{77} (2) \quad \frac{30}{91} (1)$$

مثال: در آزمایشگاهی ۴ موش سفید و ۷ موش سیاه نگهداری می شوند. سه موش به تصادف بیرون می آوریم، احتمال آن که تعداد موش های سیاه بیشتر باشد کدام است؟

$$\frac{119}{165} (4) \quad \frac{56}{165} (3) \quad \frac{109}{165} (2) \quad \frac{84}{165} (1)$$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2} \binom{4}{1} + \binom{7}{3} \binom{4}{0}}{\binom{11}{3}} = \frac{21 \times 4 + 35 \times 1}{165} = \frac{119}{165}$$

مثال: در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن ها خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر دو موش سفید باشند.

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6 \times 6}{45} = \frac{6}{45}$$

ب) فقط یک موش سفید باشد.

جواب:

$$P(B) = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{6 \times 6}{45} = \frac{24}{45}$$

ج) موش سفید در بین آن ها نباشد.

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{1 \times 15}{45} = \frac{15}{45}$$

مثال: از بین ۳ موش سفید، ۴ موش سیاه و ۵ موش خاکستری، ۳ موش به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که حداقل دو موش هم رنگ باشد؟

$$\frac{103}{110}(4) \quad \frac{7}{110}(3) \quad \frac{8}{11}(2) \quad \frac{3}{11}(1)$$

جواب: برای به دست آوردن احتمال آن که حداقل دو موش هم رنگ باشد، از متمم استفاده می کنیم. که متمم آن برابر است با هیچ دو موشی مثل هم نباشد (موش ها متمایز باشند).

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = 1 - \frac{3 \times 4 \times 5}{12 \times 11 \times 10} = 1 - \frac{3 \times 4 \times 5}{2 \times 11 \times 10}$$

$$= 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

مثال: ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آنها اختیار کنیم احتمال آن که:

الف) یک لامپ سالم باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} \text{ جواب:}$$

ب) هر سه لامپ سالم باشند. (سراسری ریاضی).

$$P(B) = \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} \text{ جواب:}$$

ج) حداقل یک لامپ سوخته باشد.

جواب: حداقل یک لامپ سوخته باشد، برابر است با $\underbrace{3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1}_\text{لامپ سوخته}$ که متمم آن $\bar{C}$ برابر

است با این که هیچ لامپی نسوزد.

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

مثال: از میان ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم چهار نفره تشکیل دهیم. اگر افراد به تصادف انتخاب شوند، چقدر احتمال دارد:

الف) یک نفر زن باشد؟

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}} \text{ جواب:}$$

ب) حداقل یک نفر مرد باشد؟

جواب: حداقل یک نفر مرد باشد برابر است با $\underbrace{۴ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱}_\text{مرد} = B$ که متمم آن $\bar{B}$ برابر

است با هیچ کدام مرد نباشند.

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}}$$

ج) حداقل سه نفر زن باشد؟

جواب:

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1} + \binom{4}{4}\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}}$$

مثال: می خواهیم از بین ۳ دانش آموز کلاس دهم رشته ی ریاضی و ۲ دانش آموز

دهم رشته ی تجربی یک تیم دو نفره ی تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل

به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ی ریاضی و ۱ نفر از رشته ی تجربی باشد؟

$$P(A) = \frac{\text{تجربی } \binom{3}{2}\binom{2}{1} \text{ ریاضی}}{\text{کل } \binom{5}{2}} = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{3}{5}$$

مثال: از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۳، ۳، ۲، ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند؛ اگر به تصادف ۴ نفر از بین آن ها معرفی شوند با کدام احتمال:

الف) از هر گروه یک نفر معرفی شده اند؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{2}{21} \quad \frac{3}{14}$$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{9}{4}} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 3}{126} = \frac{1}{7}$$

ب) حداقل دو نفر از یک گروه آزمایشی باشند.

جواب:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

مثال: برای انجام مسابقه‌ای ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده- اند؛ اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آن ها انتخاب شوند با کدام احتمال، تعداد افراد انتخابی در این دو گروه متفاوتند؟

$$\frac{5}{7} (4) \quad \frac{4}{7} (3\sqrt{15}) \quad \frac{2}{7} (2) \quad \frac{5}{14} (1)$$

جواب: متمم این مساله برابر است با تعداد افراد انتخابی مساوی باشند.

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = 1 - \frac{6 \times 15}{210} = \frac{20}{210} = \frac{4}{21}$$

مثال: از هر یک از تیم های فوتبال، والیبال، هندبال و بسکتبال ۵ نفر به جلسه ای دعوت شده اند؛ اگر سه نفر به طور تصادفی از بین آن ها انتخاب شود مطلوبست احتمال آن که:

الف) دو به دو هم تیمی نباشند.

جواب: فضای نمونه ای برابر است با انتخاب ۳ نفر از کل افراد. یعنی ۲۰ نفر و برای پیشامد آن، ابتدا از ۴ تیم، ۳ تیم انتخاب می کنیم، سپس از هر تیم یک نفر انتخاب می کنیم.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}}$$

ب) فقط دو نفر از آن ها هم تیمی باشند.

جواب: برای پیشامد آن ابتدا یک تیم از چهار تیم انتخاب می کنیم، سپس ۲ نفر از آن تیم بیرون آورده و سپس یک نفر باقیمانده را از بقیه افراد، یعنی ۱۵ نفر انتخاب می کنیم.

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{15}{1}}{\binom{20}{3}}$$

مثال: از میان ۲۰ دانش آموز که در ۴ ردیف مساوی روی نیمکت های یک کلاس نشسته - ان، دو نفر را به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که هر دو از یک ردیف باشند، کدام است؟

$$\frac{1}{19} (4) \quad \frac{4}{19} (3 \sqrt{\quad}) \quad \frac{1}{20} (2) \quad \frac{3}{19} (1)$$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{10 + 10 + 10 + 10}{190} = \frac{40}{190} = \frac{4}{19}$$

مثال: از میان ۵ جفت کفش متمایز، سه لنگه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که در میان آن ها یک جفت موجود باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{3} (4 \sqrt{\quad}) \quad \frac{1}{6} (3) \quad \frac{1}{9} (2) \quad \frac{2}{9} (1)$$

جواب:

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{یک جفت از ۵ جفت}} \times \underbrace{\binom{8}{1}}_{\text{یک لنگه از ۸ لنگه باقیمانده}} = 5 \times 8 = 40$$

$$P(A) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

مثال: از میان ۱۰ نقطه ی زیر، ۴ نقطه به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که با ۴ نقطه ی انتخاب شده بتوان یک چهار ضلعی ساخت که روی هر خط فقط یک رأس چهار ضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)



$$\frac{4}{35} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{35} \quad (3)$$

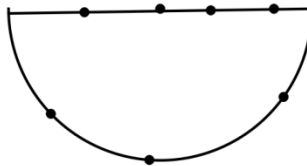
$$\frac{2}{35} \quad (2)$$

$$\frac{1}{35} \quad (1)$$

جواب:

$$P(A) = \frac{(\overset{1}{1})(\overset{2}{2})(\overset{3}{3})(\overset{4}{4})}{(\overset{1}{4})} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{210} = \frac{4}{35}$$

مثال: از نقاط شکل زیر سه نقطه به تصادف خارج می کنیم؛ احتمال آن که نقاط انتخاب شده تشکیل مثلث بدهند کدام است؟



$$\frac{31}{35} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{24}{35} \quad (3)$$

$$\frac{29}{35} \quad (2)$$

$$\frac{30}{35} \quad (1)$$

جواب:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{(\overset{4}{4})}{(\overset{7}{7})} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

نکته: در صورتی که سه نقطه روی یک خط باشند، مثلث تشکیل نمی شود.

مثال: دو رأس از یک پنج ضلعی را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو رأس مجاور باشند، کدام است؟

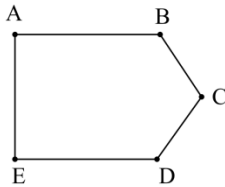
$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

جواب:



$$A \text{ پشامد} = \{AB, BC, CD, DE, EA\} \rightarrow P(A) = \frac{5}{\binom{5}{2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته اند، اگر به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون آوریم، با کدام احتمال:

الف) جمع اعداد این دو کارت زوج است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

$$\frac{5}{9} (۴) \quad \frac{1}{2} (۳) \quad \frac{4}{9} (۲) \quad \frac{2}{5} (۱۷)$$

جواب: جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3 + 3}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

ب) جمع اعداد این دو کارت فرد است؟

جواب:

جمع دو عدد وقتی فرد است که یکی زوج و یکی فرد باشد.

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{9}{15}$$

ج) ضرب اعداد این دو کارت زوج است؟

جواب:

ضرب دو عدد وقتی زوج است که یا هر دو زوج باشند، یا یکی زوج یکی فرد.

$$P(C) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{12}{15}$$

مثال: اعداد ۱، ۲، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است؛ به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است.
(سراسری ریاضی ۹۱)

$$\frac{1}{12} (1) \quad \frac{1}{9} (2) \quad \frac{1}{8} (3) \quad \frac{1}{6} (4)$$

جواب:

$$A_{\text{پیشامد}} = \{(2,9), (3,8), (4,7), (5,6)\}, P(A) = \frac{4}{\binom{9}{2}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

مثال: در ظرفی شش مهره با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ریخته شده اند دو مهره با هم بیرون می آوریم. با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

$$\frac{1}{3} (1) \quad \frac{2}{5} (2) \quad \frac{3}{15} (3) \quad \frac{2}{3} (4)$$

جواب:

$$A_{\text{پیشامد}} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}, P(A) = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

مثال: در ظرفی ۱۰ مهره با شماره های ۱، ۲، ...، ۱۰ موجود است. سه مهره به تصادف و با هم از جعبه خارج می کنیم؛ احتمال آن که عدد یکی از مهره ها ۵ و عدد هیچکدام ۱ یا ۲ نباشد کدام است؟

$$\frac{7}{40} \quad \frac{7}{20} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{7}{15}$$

جواب:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

مثال: از مجموعه $A = \{11, 12, \dots, 20\}$ یک عدد به طور تصادفی انتخاب می کنیم؛ احتمال آن که این عدد یک عدد اول است چقدر است؟

$$\frac{2}{5} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{2}$$

جواب:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ و } A = \{11, 13, 17, 19\} \text{ پیشامد}$$

توجه : خواهشمندیم در صورت استفاده کردن از جزوه مبلغ ۵۰۰۰ تومان به عنوان حق تالیف به شماره کارت ۵۸۵۹۸۳۱۰۷۱۲۰۶۴۱۰ بانک تجارت به نام حبیب هاشمی واریز گردد. با تشکر فراوان

(استفاده از تمامی جزوات برای همکاران محترم رایگان است.)

۷-۱۷ احتمال های مربوط به اصل ضرب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}} = \frac{\text{خواسته ی احتمال}}{\text{کل اعداد خواسته شده}}$$

مثال: اگر با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

$$\frac{1}{2} (1) \quad \frac{1}{4} (2) \quad \frac{3}{4} (3) \quad \frac{1}{4} (4)$$

جواب:

$$n(S) = \underbrace{4}_{(2)} \times \underbrace{3}_{(1)} \times \underbrace{2}_{(4)} \times \underbrace{1}_{(6)} \quad \text{و} \quad n(A) = \underbrace{3}_{(1)} \times \underbrace{2}_{(4)} \times \underbrace{1}_{(6)} \times \underbrace{3}_{(2)}$$

شروع

$$P(A) = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

مثال: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ به وجود آید احتمال آن که این عدد زوج باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

$$\frac{3}{5} (1) \quad \frac{1}{2} (2) \quad \frac{3}{5} (3) \quad \frac{5}{8} (4)$$

جواب:

$$n(S) = \overset{\text{شروع}}{\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(1) \\ 2 \\ 3 \\ 4}}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(0) \\ 2 \\ 3 \\ 4}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{2 \\ 3 \\ 4}} = 48$$

$$n(A) = \left\{ \underbrace{\boxed{4} \boxed{3} \boxed{1}}_{\text{فقط صفر}} + \underbrace{\boxed{3} \boxed{3} \boxed{2}}_{4 \text{ یا } 2} \right\} = 30 \rightarrow P(A) = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

تمرین: چهار رقم ۳، ۲، ۱، ۰ را به تصادف کنار هم قرار می دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۲ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{5}{9}$

ب) مضرب ۶ حاصل می شود؟ (سراسری تجربی ۸۹ خارج از کشور)

جواب: $\frac{5}{9}$

تمرین: چهار رقم ۹، ۷، ۵، ۰ را به تصادف در کنار هم قرار می دهیم با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی:

الف) مضرب ۵ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{5}{9}$

ب) مضرب ۱۵ حاصل می شود؟

جواب: $\frac{5}{9}$

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۶ ابتدا مجموع اعداد را به دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود به سراغ مضرب ۲ می رویم.

تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد، تعداد اعداد مضرب ۶ برابر صفر است.

نکته: برای بررسی تعداد اعداد مضرب ۱۵ ابتدا مجموع اعداد را به دست می آوریم؛ اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر بود، به سراغ مضرب ۵ می رویم.
تذکر: اگر مجموع اعداد بر ۳ بخشپذیر نباشد تعداد اعداد مضرب ۱۵ برابر صفر است.

مثال: با استفاده از اعداد مجموعه $\{1, 2, 5, 8, 9\}$ به طور تصادفی عددی ۵ رقمی ساخته ایم، با چه احتمالی این اعداد از ۵۰۰۰۰ بزرگتر و از ۸۰۰۰۰ کوچکتر است؟

$$\frac{1}{5} (17) \quad \frac{3}{10} (2) \quad \frac{1}{3} (3) \quad \frac{1}{4} (4)$$

جواب:

$$n(S) = 5! = 120, n(A) = \boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1} = 24, P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

مثال: با کدام احتمال رقم سمت راست پلاک اولین اتومبیلی که از بزرگراه خارج می شود از ۴ بیشتر نیست، یا مضرب ۳ می باشد. (رقم صفر در پلاک اتومبیل به کار نمی رود)
(سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}, n(S) = 9$$

پلاک مضرب ۳ یا بیشتر از ۴ نیست. $A =$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}, n(A) = 6 \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مثال: از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف یک عدد برداشته ایم با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است (سراسری ریاضی ۸۶).

متمم سوال میشه رقم ۲ در این عدد ظاهر نشده باشد.

$$n(S): \underbrace{9}_{\substack{1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}} \times \underbrace{10}_{\substack{1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}} \times \underbrace{10}_{\substack{1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}}, \quad n(A'): \underbrace{8}_{\substack{1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}} \times \underbrace{9}_{\substack{1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}} \times \underbrace{9}_{\substack{1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9}}$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{8 \times 9 \times 9}{9 \times 10 \times 10} = \frac{18}{25}$$

$$P(A) = 1 - P(A') \rightarrow P(A) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25} \quad \text{جواب:}$$

دقت کنیم: از پیشامد متمم معمولاً وقتی استفاده می کنیم که تعداد اعضای

پیشامد مورد نظر سوال زیاد باشد در این صورت متمم پیشامد مورد نظر را نوشته،

احتمال آن را حساب می کنیم و حاصل را از یک کم می کنیم.

۸-۱۷ احتمال های مربوط به جایگشت

مثال: اگر حروف کلمه ی جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر

احتمال دارد دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟

$$P(A) = \frac{2! \times 7!}{8!} = \frac{2}{8}$$

(الف)

مثال: سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را در یک قفسه کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 3!}{7!} \text{ جواب: الف) کتاب های ریاضی همواره کنار هم باشند. جواب:}$$

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 4!}{7!} \text{ ب) کتاب های ادبی همواره کنار هم باشند.}$$

پ) کتاب های ریاضی همواره کنار هم و کتاب های ادبی همواره کنار هم

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2! \times 3! \times 4!}{7!} \text{ باشند؟}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که همواره در آن رقم

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 3!}{5!} \text{ های فرد کنار هم باشند ، چقدر است ؟ جواب:}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که همواره در آن عدد

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3!}{5!} \text{ به کار رفته باشد، چقدر است ؟ جواب:}$$

مثال: حروف کلمه ی مهتاب را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم، مطلوبست

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!}{5!} \text{ احتمال آن که «الف» بلافاصله بعد «ت» بیاید ؟ جواب:}$$

مثال: حروف کلمه‌ی computer را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که

الف) حروف صدا دار کنار هم باشند (o, u, e).

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 3!}{8!}$$

ب) در آن ها کلمه‌ی comp وجود داشته باشد.

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5!}{8!}$$

پ) حروف r, e, t, p کنار هم نباشند.

$$p = 1 - \frac{5! \times 4!}{8!}$$

تمرین: افراد A, B, C, D, E, F را در یک صف کنار هم قرار می‌دهیم؛ مطلوبست احتمال آنکه A, B کنار هم باشند و E, F کنار هم نباشند؟

مثال: حروف کلمه‌ی opissum را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که در آن:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}}$$

$$p = 1 - \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}}$$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند - ۱ = احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}}$$

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 2!}{7!}$$

مثال: حروف کلمه‌ی LAGRANGE را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم،
مطلوبست احتمال آن که:

(الف) حروف یکسان کنار هم باشند.

جواب:

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6!}{8!} = \frac{6! \times 2! \times 2!}{8!}$$

(ب) حروف یکسان کنار هم نباشند.

جواب: $\frac{13}{14}$

تمرین: حروف کلمه‌ی ATAXIA را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم با
کدام احتمال، سه حرف A در کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4}$$

مثال: اعداد ۹، ۶، ۲ را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم با کدام احتمال، دو رقم زوج
کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$$

$$p(A) = \frac{2! \times 2!}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال آن که چند شیء کنار هم باشند - ۱ = احتمال آن که چند شیء کنار هم نباشند

مثال: ۶ نفر که ۲ تای آن‌ها برادر می‌باشند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست
احتمال آن که برادرها کنار هم نباشند.

جواب:

(احتمال برادرها کنار هم باشند - ۱) = احتمال برادرها کنار هم نباشند

$$1 - \frac{5! \times 2!}{6!} = 1 - \frac{5! \times 2}{6 \times 5!} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال: حروف کلمه ی TEACH را بریده به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم با کدام

احتمال بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار می گیرد؟

جواب: بین دو حرف E و A حداقل یک حرف قرار گیرد؛ یعنی دو حرف E, A در کنار هم نیستند. بنابراین از متمم کمک می گیریم.

$$p = 1 - \frac{4! \times 2!}{5!}$$

مثال: با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ یک عدد ۵ رقمی نوشته ایم؛ احتمال آن که دو رقم ۱ کنار هم

قرار گیرند کدام است؟

جواب: در جایگشت های این ۵ رقم دو تای آن ها یکسان هستند. در ضمن صفر سمت

چپ قرار نمی گیرد، بنابراین داریم:

$$n(S) = \frac{4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 48$$

اما برای یافتن تعداد حالت های مطلوب دو رقم ۱ را با هم در نظر می گیریم پس ۴ شیء

متمايز داریم که صفر نمی تواند سمت چپ باشد:

$$n(A) = 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \rightarrow P(A) = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$$

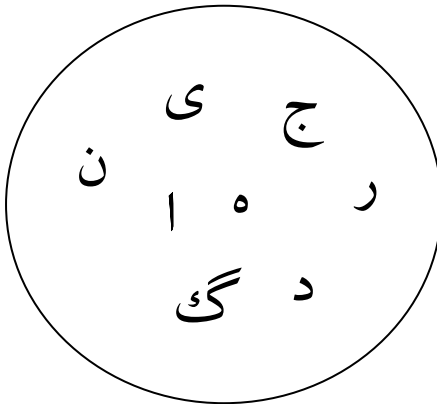
مثال : اگر حروف کلمه ی جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر

احتمال دارد: الف) حرف «ی» آخر باشد؟

ب) با حرف «ج» شروع و به حرف «ی» ختم شود؟

(الف) $P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$

(ب) $P(C) = \frac{6!}{8!} = \frac{1}{56}$ ج ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ی



مثال: حروف کلمه ی TARANEH را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم،
مطلوبست احتمال آن که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{1} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = 6!$$

حرف A

$$n(A) = 6!$$

$$n(S) = \frac{7!}{2!}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6!}{\frac{7!}{2!}} = \frac{2! \times 6!}{7 \times 6!} = \frac{2}{7}$$

مثال: حروف کلمه ی ARAYEHA را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم،
مطلوبست احتمال آن که حرف A همواره در وسط قرار گیرد؟

جواب:

$$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{1} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} = \frac{6!}{2!}$$

تعداد A های تکراری

$$n(A) = \frac{6!}{2!}, n(S) = \frac{7!}{3!}, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 6!}{2 \times 1 \times 7 \times 6!} = \frac{3}{7}$$

مثال: حروف کلمه *computer* را بریده، به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم، مطلوبست احتمال آن که حروف r, c در اول و آخر کلمه باشند؟

جواب:

$$\boxed{2} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{6!} \times \boxed{1} = 6! \times 2$$

c

$$n(A) = 6! \times 2, n(S) = 8!, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 6!}{8!} = \frac{2 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{28}$$

مثال: ۶ نفر که ۲ تای آن‌ها برادر هستند را در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که برادرها در اول و آخر صف باشند.

جواب:

$$n(S) = 6!, n(A) = \boxed{2} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{4!} \times \boxed{1}$$

$$p(A) = \frac{4! \times 2}{6!} = \frac{4! \times 2}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{15}$$

مثال: حروف کلمه *LAGRANGE* را بریده و به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) حروف R, L در اول و آخر کلمه باشند.

جواب:

$$n(A) = \frac{2 \times 6!}{2! \times 2!}, n(S) = \frac{8!}{2! \times 2!}, P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 6!}{8!} = \frac{2 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{28}$$

ب) حروف R, G در اول و آخر کلمه باشند.

ج) حروف A, G در اول و آخر کلمه باشند.

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه به طور یک در میان قرار گرفته باشند؟

$$n(A) = (4! \times 4!) \times 2 \quad ; n(S) = 8! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(4! \times 4!) \times 2}{8!}$$

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه پسرها به طور یک در میان قرار گرفته باشند؟

$$n(A) = (4! \times 4!) \times 2 \quad ; n(S) = 8! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(4! \times 4!) \times 2}{8!}$$

مثال: ۴ دختر و ۴ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه هیچ دو دختری متوالی نباشند؟ (یعنی دخترها یک در میان باشند)

$$n(A) = (4! \times 4!) \times 2 \quad ; n(S) = 8! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(4! \times 4!) \times 2}{8!}$$

مثال: ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه، رقم های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

$$n(A) = \frac{3! \times 3! \times 2}{3!} = \frac{3! \times 2}{1} = 6 \times 2 = 12, \quad n(S) = \frac{6!}{3!} = 120$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{120} = 0.1$$

تمرین: در ساختن یک کلمه شش حرفی باحروف کلمه PANAMA احتمال آن که حروف A یک در میان باشند کدام است؟

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه به طور یک در میان قرار گرفته باشند؟

$$n(A) = 4! \times 3! \quad n(S) = 7! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه دخترها به طور یک در میان قرار گرفته باشند؟

$$n(A) = 4! \times 3! \quad n(S) = 7! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه پسرها به طور یک در میان قرار گرفته باشند؟

$$n(A) = (4! \times 3!) \times 3 \quad n(S) = 7! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(4! \times 3!) \times 3}{7!}$$

مثال: ۴ دختر و ۳ پسر را در یک صف کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه هیچ دو دختری متوالی نباشند؟ (یعنی دخترها یک در میان باشند)

$$n(A) = 4! \times 3! \quad n(S) = 7! \quad ; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!}$$

مثال: ارقام عدد ۱۲۳۴۵۶۷ به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم مطلوبست احتمال آنکه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} \quad \text{الف) ارقام فرد یک در میان باشند؟}$$

جواب: $4! \times 3!$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} \quad \text{ب) هیچ دو رقم فردی متوالی نباشند؟}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3! \times 3}{7!} \quad \text{ج) ارقام زوج یک در میان باشند؟}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 3!}{7!} \quad \text{د) بین هر دو رقم فرد، یک رقم زوج قرار گیرد؟}$$

مثال: چهار نوع کتاب علمی متمایز، و پنج نوع کتاب ادبی متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار می دهیم، مطلوبست احتمال آنکه که کتاب های علمی یک در میان قرار بگیرند؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5! \times 4! \times 3}{9!}$$

مثال: ظرفی شامل ۶ مهره سفید متمایز و ۵ مهره سیاه متمایز است. مهره ها را یکی پس از دیگری به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم؛ چقدر احتمال دارد:

الف) مهره های سیاه و سفید، به صورت یک در میان خارج شده باشند.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 5!}{11!}$

ب) مهره های سفید یک در میان باشند. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 5!}{11!}$

پ) دو مهره سفید به صورت متوالی خارج نشود. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 5!}{11!}$

ت) مهره های سیاه یک در میان خارج شده باشند. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 5! \times 3}{11!}$

ج) بین دو مهره سیاه، فقط یک مهره سفید قرار گیرد. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6! \times 5! \times 3}{11!}$

مثال: در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی، پی در پی و بدون جایگذاری خارج می کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره ی فرد، متوالیاً خارج نمی شود؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۰/۱ (۱۶) ۰/۱۵ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۲۵ (۴)

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

مثال: در سؤال قبل اگر مهره ها با شماره زوج یک در میان باشند، احتمال را به دست آورید.

جواب: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 2! \times 3}{5!} = \frac{6 \times 2 \times 3}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

۹-۷ احتمال های مربوط به انتخاب همراه با جایگشت

مثال: با استفاده از حروف کلمه‌ی *computer* به تصادف یک کلمه‌ی ۵ حرفی ساخته ایم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) در آن حرف *r* به کار رفته باشد.

$$n(A) = \binom{5}{1} \times 5! \quad ; \quad n(S) = \binom{8}{5} \times 5! \quad ; \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} \times 5!}{\binom{8}{5} \times 5!} = \frac{5}{56}$$

ب) در آن حروف *r, u* به کار رفته باشد.

$$n(A) = \binom{6}{2} \times 5! \quad ; \quad n(S) = \binom{8}{5} \times 5! \quad ; \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{2} \times 5!}{\binom{8}{5} \times 5!}$$

ج) در آن حروف *r, u* به کار نرفته باشد.

$$n(A) = \binom{6}{5} \times 5! \quad ; \quad n(S) = \binom{8}{5} \times 5! \quad ; \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{6}{5} \times 5!}{\binom{8}{5} \times 5!}$$

مثال: با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ به تصادف یک عدد سه رقمی بدون تکرار

ارقام می‌سازیم؛ مطلوبست احتمال آن که دو رقم از عدد سه رقمی ساخته شده زوج باشد؟

جواب:

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دو رقم از زوج ها}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یک رقم از فرد ها}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایگشت ارقام}} \quad ; \quad n(S) = \binom{9}{3} \times 3!$$

مثال: ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در یک قفسه

کنار هم می‌چینیم. مطلوبست احتمال آنکه

الف) یکی در میان در قفسه چیده شوند؟

$$n(A) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 4! \times 3! \quad ; \quad n(S) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 7!$$

ب) کتاب‌های سال اول یکی در میان باشند.

$$n(A) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 4! \times 3! \times 3 \quad ; \quad n(S) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 7!$$

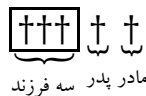
ب) هیچ دو کتاب سال دومی متوالی نباشد.

$$n(A) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 4! \times 3! \quad ; \quad n(S) = \binom{5}{3} \binom{6}{4} \times 7!$$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن‌ها بر روی ۶ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام

احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:



$$n(S) = P(6,5), n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جایجایی همه افراد}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایجایی فرزند ها}} \times \underbrace{2}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{3! \times 3! \times 2}{P(6,5)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$$

مثال: پدر و مادر و ۳ فرزند آن‌ها بر روی ۷ صندلی و در یک ردیف می‌نشینند، با کدام

احتمال روی صندلی‌های متوالی هستند و فرزندان کنار هم هستند؟

جواب:

$$n(S) = P(7,5), n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جایجایی همه افراد}} \times \underbrace{3!}_{\text{جایجایی فرزند ها}} \times \underbrace{3}_{\text{صندلی های متوالی}}$$

$$P(A) = \frac{3! \times 3! \times 3}{P(7,5)} = \frac{108}{2520}$$

مثال: هر يك از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ را در يكي از ۶ خانه‌ی هم ردیف به تصادف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه‌های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

جواب:

$$n(S) = P(۶,۵), n(A) = ۴! \times ۲! \times ۲$$

مثال: تعداد ۷ نفر که ۲ برادر در بین آن‌ها حضور دارند، مفروضند. از بین آن‌ها ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم و در یک ردیف کنار هم می‌نشانیم، با چه احتمالی دو برادر در ابتدا و انتهای ردیف نشسته‌اند؟

جواب: در محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، ابتدا ۵ نفر از ۷ نفر را انتخاب می‌کنیم و سپس آن‌ها را در یک ردیف می‌نشانیم که ۵! جایگشت دارند:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} \times ۵! = \frac{۷!}{۵! \times (۷-۵)!} \times ۵! = \frac{۷!}{۲} = ۲۵۲۰$$

برای آن‌ها که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند باید حتما در بین انتخاب شده‌ها باشند. در نتیجه باید سه نفر از ۵ نفر باقیمانده را انتخاب کنیم و سپس جایگشت آن‌ها را طوری محاسبه می‌کنیم که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند:

$$n(A) = \boxed{۲} \times \boxed{\binom{۵}{۳} \times ۳!} \times \boxed{۱} = ۱۲۰ \text{ و } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲۱}$$

پایان احتمال

بخش دوم

آمار

۱۰-۷ تعریف آمار و علم آمار:

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، ساماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

مراحل علم آمار

۱- جمع آوری اعداد و ارقام

۲- ساماندهی و نمایش

۳- تحلیل و تفسیر داده ها

۴- نتیجه گیری و قضاوت

مثال: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اولین قدم در استفاده از «علم آمار» جمع آوری داده هاست. درست

ب) پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه گیری استفاده از «علم آمار» است.

درست

پ) « علم آمار » همان اعداد و ارقام است. نادرست

اندازه‌گیری

در رسیدن به اطلاعات عددی با معیار مناسب برای انجام بررسی آماری، نسبت دادن عدد به موضوع مورد مطالعه را اندازه‌گیری گوییم.

اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی برای انجام بررسی آماری یک یا چند موضوع اندازه‌گیری است.

به عنوان نمونه برای رسیدن به اطلاعات عددی در بررسی پیشرفت سالانه تولید گندم در کشور، مقدار گندم تولید شده در سال اندازه‌گیری شده و به صورت عدد مشخص می‌شود.

مثال: نسبت دادن عدد به موضوع مورد مطالعه برای رسیدن به اطلاعات عددی با معیاری مناسب کدام است؟

۱) نمونه‌گیری ۲) اندازه‌گیری ۳) مدل سازی ریاضی ۴) سرشماری

مثال: اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی است.

۱) نمونه‌گیری ۲) اندازه‌گیری ۳) مدل سازی ریاضی ۴) سرشماری

۲-۱-۱ تعریف جامعه یا جمعیت:

مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیایی که درباره‌ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

مثال: دانش آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هریک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند

صفت: به کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری باشد صفت گوییم و بر دو نوع است:

(۱) **صفت ثابت:** همه‌ی عناصر جامعه آن را دارا باشند مانند کارمندان شرکت نفت

(۲) **صفت متغیر:** ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند. مانند گروه خونی

مقدار متغیر: عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند

نکته: اعضای جامعه آماری حداقل یک صفت مشترک دارند.

مشاهده آماری: جمع‌آوری اطلاعات مربوط به صفات متغیر در یک جامعه آماری را مشاهده آماری می‌گویند.

۲-۲ روش‌های مطالعه آمار

مطالعه آماری موضوع یا موضوعات به دو روش **سرشماری و نمونه‌گیری** انجام می‌گیرد.

۲-۲-۱ سرشماری

مطالعه یا بررسی تمام اعضای جامعه آماری را روش سرشماری گویند.

مهمترین مشکلات سرشماری:

* بالا بودن هزینه

* وقت‌گیر بودن

* در دسترس نبودن اعضای جامعه

نمونه: بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می شو

تعداد اعضای جامعه و نمونه را به ترتیب اندازه جامعه و نمونه گویند.

مثال: کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه ی جامعه کمتر از اندازه ی نمونه است. نادرست

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه اند. نادرست

ج) نمونه ی زیر مجموعه ای از جامعه است. درست

نکته: عمل نمونه گیری مهمترین بخش آمار است، نمونه ای می تواند نمایانگر خصوصیات جامعه آماری باشد که:

۱) به اندازه کافی بزرگ باشد.

۲) اعضایش به طور تصادفی انتخاب شوند.

هرچه تنوع موضوع در جامعه بیشتر باشد اندازه نمونه بزرگتر انتخاب می شود.

انتخاب اعضای نمونه نباید از قانونی پیروی کند.

معمولاً اندازه نمونه حداقل ۱۰ درصد اندازه جامعه است.

مثال: افراد یا اشیایی که موضوع یا موضوعاتی روی آنها مطالعه می شود، کدام است؟

۱) نمونه ۲) سرشماری ۳) جامعه ۴) نمونه گیری

مثال: مطالعه و بررسی آماری تمام اعضای جامعه کدام است؟

(۱) نمونه (۲) سرشماری (۳) جامعه (۴) نمونه‌گیری

مثال: از بین رفتن اعضای جامعه در بعضی موضوعات مربوط به کدام روش آماری است؟

(۱) نمونه‌گیری (۲) سرشماری (۳) اندازه‌گیری (۴) مدل‌سازی

مثال: برای کدام موضوع در کلاس اندازه نمونه بزرگ‌تر است؟

(۱) قد (۲) سن (۳) هوش (۴) معدل

مثال: کدام نمونه به خوبی بیانگر خصوصیات جامعه نیست؟

(۱) به اندازه کافی بزرگ باشد. (۲) اعضای قانونی انتخاب شوند.

(۳) اعضای تصادفی انتخاب شوند. (۴) اندازه‌اش بیشتر از ۱۰ درصد جامعه باشد.

نمونه تصادفی: نمونه‌ای است که اعضای به‌طور تصادفی انتخاب شوند و روش انتخاب

اعضایش از دو ویژگی زیر پیروی کند:

(۱) امکان انتخاب تمام اعضای جامعه در نمونه وجود داشته باشد.

(۲) شانس انتخاب تمام اعضای جامعه برای نمونه یکسان باشد.

مثال: در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟ (سراسری انسانی)

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد. (۲) نمونه همان جامعه آماری است.

(۳) اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است. (۴) نمونه، زیرمجموعه‌ی جامعه‌ی آماری است.

مثال: هدف اصلی علم آمار کدام است؟

(۱) تبدیل اطلاعات به یکدیگر (۲) تبدیل اطلاعات به داده‌ها

(۳) تبدیل داده‌ها به اطلاعات (۴) تبدیل داده‌ها به یکدیگر

۷-۱۲ متغیرهای تصادفی

۳-۱ متغیر تصادفی

موضوع یا موضوعاتی را که در نمونه یا جامعه مورد مطالعه قرار می‌گیرند، متغیر تصادفی گوئیم.

متغیر تصادفی دارای حالت‌ها یا مقادیری است که به‌طور تصادفی در بین اعضای جامعه یا نمونه تغییر می‌کنند.

متغیر تصادفی به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می‌شوند:

متغیر تصادفی کمی: متغیری که قابل اندازه‌گیری است و نتیجه آن عدد هست.

متغیر تصادفی کیفی: متغیری که قابل اندازه‌گیری نیست و دارای مقولات یا حالات مختلف است.

مثال: کدام متغیر تصادفی کمی است؟

(۱) جنسیت افراد (۲) وضعیت تأهل افراد (۳) نمره درس دانش آموزان (۴) گروه خونی افراد

مثال: کدام متغیر تصادفی کیفی است؟

(۱) میزان بارندگی در شهر (۲) درآمد افراد شاغل (۳) قد دانش آموزان (۴) نوع تلفن افراد

متغیر تصادفی کمی در بین اعضای نمونه یا جامعه قابل مقایسه است.

مثال: با کدام متغیر نمی‌توان دانش آموزان کلاس را با هم مقایسه کرد؟

(۱) نمره درس (۲) گروه خونی (۳) وزن (۴) تعداد اعضای خانواده

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) انواع هواپیما (مسافری، باربری، جنگنده) کیفی

ب) مدت زمانی که طول می‌کشد از خانه به مدرسه برسید. کمی

پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه‌ای) کیفی

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
موی شما چه رنگی است؟	مشکی، قهوه ای، طلایی، سفید، قرمز	کیفی
وزن شما چه عددی است؟	۶۰ تا ۷۰ کیلوگرم	کمی
چقدر از تماشای بازی فوتبال لذت می برید؟	بسیار زیاد، زیاد، متوسط، کم، بسیار کم، لذت نمی برم	کیفی

۱-۳ انواع متغیر تصادفی

متغیر تصادفی کمی دارای دو نوع پیوسته و گسسته است. همچنین متغیر تصادفی کیفی نیز دارای دو نوع ترتیبی و اسمی است.

متغیر کمی پیوسته: متغیر کمی که مقادیرش بین دو مقدار دلخواه تغییر می کند و قابل شمارش نیستند.

متغیر کمی گسسته: متغیر کمی که مقادیرش اعداد صحیح است و قابل شمارش هستند.

متغیرهای تصادفی کمی گسسته از نوع تعداد می باشند.

تذکره: متغیرهای تصادفی که می‌توان تعداد آن‌ها به صورت نیم هم شمرد جز متغیرهای تصادفی گسسته هستند مانند تعداد طبقات ساختمان که در صورت ناتمام بودن یک طبقه به صورت $۱/۵$ ، $۲/۵$ ، $۳/۵$... طبقه شمرده می‌شود.

مثال: با پر کردن جاهای خالی، پیوسته یا گسسته بودن متغیرهای کمی زیر را

مشخص کنید.

الف) سرعت خودرو یک متغیر کمی پیوسته است. مقدار آن متغیر ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

ب) میزان مصرف بنزین این خودرو، یک متغیر کمی پیوسته و مقدار آن برای هر ۱۰۰ کیلومتر ۸ لیتر است.

پ) تعداد سرنشینان مجاز در این خودرو، یک متغیر کمی گسسته است و این تعداد برابر با ۴ است
انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

الف) تعداد ماهی های یک دریا (گسسته)

ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه برسید (پیوسته)

پ) وزن افراد (پیوسته)

ت) تعداد دانش آموزان یک مدرسه (گسسته)

مثال: فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱/۶۰ سانتی متر باشد.

الف) شاخص توده بدن این شخص را حساب کنید.

$$\text{شاخص توده ی بدن} = \frac{\text{وزن}}{\text{قد}^2}$$

$$\text{شاخص توده ی بدن} = \frac{۹۵}{(۱/۶)^2} = ۳۷ / ۱۰$$

ب) شاخص توده بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته،

اسمی و ترتیبی است؟ کمی، پیوسته

مثال: در جدول زیر، پاسخ شما چه نوع متغیری (گسسته یا پیوسته) است؟

سؤال متغیر	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
قد شما چه عددی است؟	عددی بین ۱۷۲ تا ۱۸۵ سانتی متر	پیوسته
وزن شما چه عددی است؟	۸۰ / ۵ کیلوگرم	پیوسته

تعداد دوستان شما چند نفر است؟	۰، ۱، ۲، ۳،گسته	گسته
وزن دوستان چه عددی است؟	۷۰، ۷۱، ۷۲ وکیلوگرم	پیوسته
شاخص توده ی بدن خانواده ی شما چه عددی است؟	۲۲، ۳۲/۵، ۳۰ وپیوسته	پیوسته
ارتفاع شانه یوزپلنگ ایرانی چقدر است؟	عدد ی بین ۳۸ تا ۶۷ سانتی متر	پیوسته

متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد.

به عنوان مثال سطح تحصیلات (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری). مانند مقاطع تحصیلی (ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم، دانشگاهی)

متغیر کیفی اسمی (غیر ترتیبی): متغیر کیفی که حالاتش دارای ترتیب نیستند. مانند جنسیت (زن و مرد) و گروه خونی (A,B,AB,O)

اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

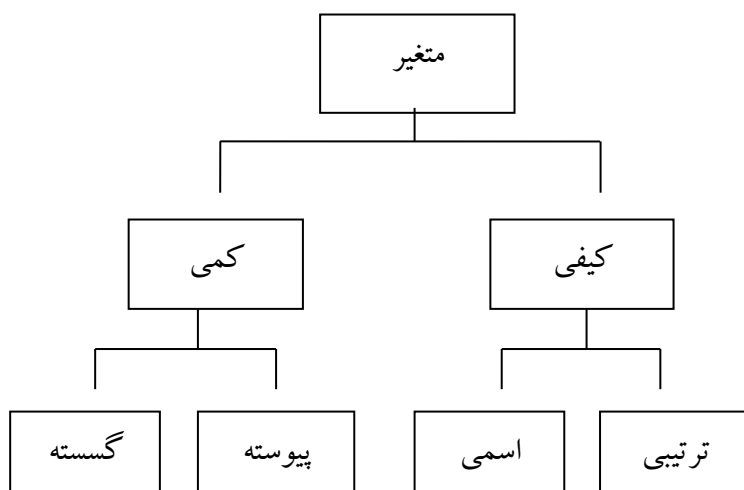
الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال،
کهن سال)

ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه ای، طلایی)

ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

انواع متغیرها در یک نگاه



مثال: نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- طول مکالمات تلفنی یک اداره (کمی پیوسته)
- تعداد نامه های یک صندوق (کمی گسسته)
- وزن نامه های موجود در یک صندوق (کمی پیوسته)
- زمانیکه یک بیمار در اتاق انتظار مطب یک پزشک منتظر است (کمی پیوسته)

- تعداد بیماران مراجعه کننده به یک پزشک در طول روز (کمی گسسته)
- نوع تلفن مورد استفاده شهروندان (کیفی اسمی)
- وضع سواد(با سواد، بیسواد) (کیفی اسمی)
- وضعیت مسکن(صاحب مسکن، بدون مسکن ملکی) (کیفی اسمی)
- میزان اجاره بها به وسیله ی شهروندان (کمی پیوسته)
- میزان پرداخت مالیات سالانه ساختمانهای مسکونی(کمی پیوسته)
- میزان بارندگی در یک شهر در طول سال (کمی پیوسته)
- مقاومت یک ترانزیستور(کمی پیوسته)
- گنجایش آب یک تانکر (کمی پیوسته)
- درآمد دانشجویان شاغل به کار (کمی گسسته)
- وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت (کیفی اسمی)
- سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری (کمی پیوسته)

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید؟

الف)میزان آلودگی هوای شهر تهران	کمی پیوسته
ب) زمان انتظار بیمار در مطب پزشک	کمی پیوسته
پ) تعداد غایبین کلاس‌های دبیرستان	کمی گسسته
ت)تعداد مکالمات تلفن افراد	کمی گسسته
ث) ارزشیابی توصیفی دانش آموزان(ضعیف، متوسط، خوب،عالی)	کیفی ترتیبی
ح) مراحل رشد انسان(نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، پیر)	کیفی ترتیبی
خ)وضعیت تأهل افراد(مجرد، متأهل)	کیفی اسمی
ج) گروه خونی افراد (A , B , AB , O)	کیفی اسمی

مثال: نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته بندی کنید.

متغیر	نوع متغیر
-------	-----------

۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر	کمی پیوسته
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	کیفی اسمی
۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	کمی گسسته
۴- میزان دمای هوا	کمی پیوسته
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	کیفی اسمی
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	کیفی ترتیبی

مثال: جدول زیر متغیرهای دانش آموزان را نشان می دهد. انواع متغیرها از نظر

کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی
سن	×			×	
نمره ریاضی نهم	×			×	
جنسیت (دختر و پسر)		×			
قد	×			×	

			×		×	وزن
	×			×		میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)
	×			×		میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)
		×			×	شاخص توده بدن
			×		×	تعداد مسافران قطار

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	کمی پیوسته
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی
اندازه ی طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته
اقوام ایرانی	کیفی اسمی
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی
دمای هوا در قله	کمی پیوسته
فشار هوا در قله کوه	کمی پیوسته

مثال: کدام یک از متغیرهای زیر کمی پیوسته است.

۱) تعداد نامه‌های یک صندوق ۲) جنسیت افراد ۳) میزان بارندگی ۴) گروه خونی

مثال: متغیر « نوع تلفن مورد استفاده شهروندان » است.

(۱) کمی گسسته (۲) کیفی اسمی (۳) کیفی ترتیبی (۴) کمی پیوسته

مثال: تعداد پاکت‌های موجود در یک صندوق پست یک متغیر.....است؟

(۱) کیفی- ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: مقطع تحصیلات افراد یک شهر، کدام نوع متغیر است؟ **(سرا سری انسانی ۸۸)**

(۱) کیفی ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: قطر تنه ی درختان یک باغ کدام نوع متغیر است؟ **(سراسری انسانی)**

(۱) کیفی ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: کدامیک از متغیرهای تصادفی زیر یک متغیر کمی گسسته است؟

(۱) وزن (۲) مراحل سن (۳) دین (۴) پول

جواب گزینه ۴ (وزن کمی پیوسته، مراحل سن کیفی ترتیبی، دین کیفی اسمی) سن کمی پیوسته است.

مثال: تعداد پاکت‌های موجود در یک صندوق پست یک متغیر.....است؟

(۱) کیفی- ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: مدت زمان مکالمه با تلفن یک پارامتراست؟

(۱) کیفی-ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟ **(سراسری تجربی ۸۷ و ۹۰)**

(۱) کیفی-اسمی (۲) کیفی ترتیبی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال: نوع آلاینده‌گی هوا چگونه متغیری است؟ **(سراسری ۹۱ خ)**

(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی

(نوع آلاینده‌گی : مونواکسید کربن. دی اکسید کربن و ...)

مثال: میزان آلاینده‌گی هوا چگونه متغیری است؟

(۱) کمی گسسته (۲) کمی پیوسته (۳) کیفی اسمی (۴) کیفی ترتیبی



